

# Thèse de Doctorat

**Lama MOURAD**

*Mémoire présenté en vue de l'obtention  
du grade de Docteur de l'Ecole des Mines de Nantes  
Sous le label de l'Université Nantes Angers Le Mans*

**Discipline : Automatique et productique**  
**Spécialité : Automatique**  
**Laboratoire : Institut de Recherche en Communication et Cybernétique de Nantes**

Soutenue le 19 Décembre 2012

École doctorale : EDSTIM  
Thèse N°2012EMNA0048

## Contrôle actif de l'accélération latérale perçue d'un véhicule automobile étroit et inclinable

### JURY

Rapporteurs :	<b>M. Said MAMMAR</b> , Professeur d'Université, Université d'Evry <b>M. Olivier SENAME</b> , Professeur d'Université, Gipsa-lab, Grenoble
Examineurs :	<b>M. Michel BASSET</b> , Professeur d'Université, ESSAIM, Mulhouse <b>M. Claude MOOG</b> , Directeur de Recherche CNRS, IRCCyN, Nantes
Invité :	<b>M. Pierre Olivier VANDANJON</b> , Chargé de Recherche, IFSTTAR, Nantes <b>M. Thierry MOULENE</b> , Directeur R&D, Lumeneo
Directeur de Thèse :	<b>M. Philippe CHEVREL</b> , Professeur, Ecole des Mines de Nantes, Nantes
Co-directeur de Thèse :	<b>M. Fabien CLAVEAU</b> , Maître Assistant, Ecole des Mines de Nantes, Nantes

## Résumé et mots-clés :

Les Véhicules Etroits et Inclinaibles (VEI) sont la convergence d'une voiture et d'un motocycle. Un mètre de largeur seulement suffit pour transporter une ou deux personnes en Tandem. Les VEI sont conçus dans le but de résoudre partiellement les problèmes de trafic routier, de minimiser la consommation énergétique et l'émission de polluants. De par leurs dimensions (ratio hauteur/largeur), ces véhicules doivent s'incliner en virage pour rester stable en compensant l'effet de l'accélération latérale. Cette inclinaison doit dans certains cas être automatique : elle peut être réalisée à l'aide d'un couple d'inclinaison généré par un actionneur dédié (système DTC), soit encore en modulant l'angle de braquage des roues (Système STC). Nous avons proposé dans ce mémoire une méthodologie de synthèse d'un régulateur structuré minimisant la norme  $H_2$  d'un problème bien posé au bénéfice d'une régulation optimisée de l'accélération latérale, considérant tour à tour les systèmes DTC et STC. Les régulateurs proposés sont paramétrés par la vitesse longitudinale et s'avèrent performants et robustes, et les moyens de réglages proposés permettent d'étudier l'intérêt relatif d'une solution DTC pure ou mixte DTC/STC, permettant de supporter les développements futurs sur le sujet. L'originalité des solutions proposées en regard des études rencontrées dans la littérature porte en particulier sur le fait de choisir de réguler directement l'accélération latérale perçue (plutôt que l'angle d'inclinaison), en anticipant la prise de virage par la prise en compte des angles et vitesse de braquage. L'optimisation de la régulation permet de réduire de manière importante le couple d'inclinaison requis, et l'accélération latérale subie par les passagers est faible. Tous les développements proposés s'appuient naturellement en amont sur un travail de modélisation (recherche du modèle juste nécessaire), et de bibliographie conséquent. Le modèle retenu comprend 5 degrés de libertés. Nous avons démontré qu'il possédait la propriété intéressante d'être *plat*, et avons utilisé cette propriété pour ouvrir des perspectives relatives à la conception d'un régulateur non-linéaire robuste, susceptible *a priori* d'accroître les performances dans le cas de « grands mouvements ». Au contraire de ce qui existe dans la littérature, le régulateur multivariable conçu pour le système SDTC permet le contrôle coordonné des actions sur les systèmes STC et DTC.

**Mots clés :** *véhicule étroit inclinable, dynamique véhicule, stabilité latérale, commande robuste, commande  $H_2$ , régulateur interpolé, commande par platitude*

Résumé et mots-clés en anglais :

## ACTIVE LATERAL ACCELERATION CONTROL OF A NARROW TILTING VEHICLE

Narrow Tilting Vehicles (NTV) are the convergence of a car and a motorcycle. One meter wide, these vehicles are designed for one or two people sitting the one in front the other. The idea behind the conception of NTV is the minimization of traffic congestion, energy consumption and pollutant emission. But because of their dimensions, these cars would have to lean into corners in order to compensate for the lateral acceleration and maintain their stability. The tilting should be automatic, and can be achieved by a tilting torque generated by a dedicated tilting actuator (DTC) or by modifying the steering angle (STC) or both (SDTC). In this thesis, we first propose a methodology for the design of an output feedback structured regulator, minimizing the  $H_2$  norm of a well-posed problem, built to optimize the lateral acceleration of the NTV, considering DTC and SDTC systems. The designed controllers, with the longitudinal velocity as a parameter, lead to the minimization of the tilting torque and of the lateral acceleration perceived by the driver, and have good performances as well as good robustness properties. Furthermore, the tuning methodology allows the comparaison of a pure DTC solution and a mixed SDTC alternative. Compared to the literature, the originalities in this thesis are the direct control of the measured value of the lateral acceleration (instead of the tilting angle), and the anticipation of the tilt, thanks to the use of the steering angle and angular velocity. Furthermore, the SDTC solution allows to drive both the STC and DTC systems in a coordinated manner. The design strategies are based on a preliminary study of vehicle models, and a design model with 5 DoF was developed. We demonstrated that the model has the nice property to be flat, and in the last section of the thesis, used this property to initiate the design of a non-linear robust controller, which can *a priori* lead to better performances in case of “large motions”.

**Key words:** *narrow tilting vehicle, vehicle dynamics, lateral stability, robust control,  $H_2$  control, gain scheduled controller, flatness based control.*

## Remerciements

---

Je voudrais remercier en premier lieu mon directeur de thèse, M. Philippe CHEVREL et mon encadrant M. Fabien CLAVEAU, sans qui ce travail n'aurait pas eu lieu. Je les remercie pour leur soutien, leurs encouragements et leur patience. Leur implication a fait que je me suis sentie en famille, sans oublier la bonne humeur de Fabien.

Je voudrais remercier également M. Mohamed YAGOUBI pour son amitié, son aide et ses conseils.

J'exprime ma gratitude à M. Alain GLUMINEAU, qui a suivi l'avancement de mes travaux et n'a pas manqué de me donner de précieux conseils.

Je remercie évidemment les membres de mon jury de thèse, M. Said MAMMAR, M. Olivier SENAME, M. Michel BASSET, M. Claude MOOG, M. Pierre-Olivier VANDANJON et M. Thierry MOULENE.

J'adresse mes remerciements à mes amis de Nantes, Salim et Dalia MAAKAROUN, Amine et Rana IBRAHIM, Joe et Haifa ANTONIOS, Tony et Mireille MOURAD, Dr. Oussama ALHABACH, Nour ALHABACH, Younes MATAR, Paula HERRERA, Michael CANU, Mariem ZOUCHE et Victor PILLAC. Je remercie aussi Mme Michelle DAUVE, de l'école des mines de Nantes, qui m'a toujours accueillie avec un sourire agréable et apaisant.

Finalement, mes plus grands remerciements s'adressent à ma famille : mon fiancé Wissam RACHKIDI, mon frère Wassim MOURAD, ma mère et mon père, Layla et Elias MOURAD pour leurs contributions et leur soutien.

## Liste des tableaux

Tableau 2. 1 : Effets de la variation de l'angle d'inclinaison $\theta$ sur les différents transferts.....	51
Tableau 2. 2 : Effets de variation de la vitesse $V_x$ sur les différents transferts. ....	52
Tableau 3. 1 : Comparaison des Commandes DTC et STC.....	78
Tableau 4. 1 : Marges de robustesse des régulateurs 1, 2 pour différentes pondérations .....	115
Tableau 4. 2 : Marges de robustesses des régulateurs .....	121
Tableau 4. 4 : Valeurs des gains du régulateur LPV .....	129
Tableau 5. 1 : Valeurs des pondérations des régulateurs.....	142
Tableau 5. 2 : Valeurs des gains du retour d'état différents régulateurs .....	143
Tableau 5. 3: Marges de stabilité du régulateur MIMO.....	149
Tableau 5. 4 : Borne supérieure de l'énergie en sortie du système en boucle fermée avec différents régulateurs et sur différents intervalles.....	154

# Liste des figures

Figure 1. 1 : Diagramme de pourcentage du nombre de passagers par type de trajet (Scottish Household 2010) .....	15
Figure 1. 2 : Distance parcourue par un conducteur citadin en île de France (Schulz 2008) .....	15
Figure 1. 3 : GM Lean Machine .....	21
Figure 1. 4 : Mercedes Life Jet F300 .....	21
Figure 1. 5 : MP3 Piaggio .....	21
Figure 1. 6 : Carver One .....	21
Figure 1. 7 : Tilter .....	21
Figure 1. 8 : Véléance .....	21
Figure 1. 9 : Torga .....	22
Figure 1. 10 : Véléance quad'ode .....	22
Figure 1. 11 : Tango .....	24
Figure 1. 12 : Volvo Tandem .....	24
Figure 1. 13 : Prodrive Naro .....	24
Figure 1. 14 : Twizy- Renault .....	24
Figure 1. 15 : Smera - Lumeneo .....	24
Figure 1. 16 : Land Glider .....	24
Figure 1. 17 : Toyota PM- différentes positions/longueurs .....	25
Figure 1. 18 : Commuter (Rainbow Systems) .....	25
Figure 2. 1 : Architecture du cycle en V .....	26
Figure 2. 2 : De la conception à l'intégration d'une loi de commande .....	27
Figure 2. 3 : La Smera, véhicule inclinable en cours de développement par la société lumeneo .....	29
Figure 2. 4 : Schéma multi-corps représentatif du véhicule inclinable (cf. (Maakaroun 2011)) .....	29
Figure 2. 5 : Vue du plan (XY) .....	32
Figure 2. 6 : Vue arrière du véhicule dans le plan (YZ)- route plate .....	32
Figure 2. 7 : Vue arrière du véhicule dans le plan (YZ)- route avec angle de dévers $\eta$ .....	33
Figure 2. 8 : Le moment $M_s$ remplacé par les forces $F_{s-r}$ et $F_s$ .....	34
Figure 2. 9 : Angles de braquage $\delta$ , de glissement $\alpha$ et vitesse de déplacement $V_x$ .....	37
Figure 2. 10 : Forces au point de contact roue/sol. $\rho$ angle de chasse, $\gamma$ chasse, $F_z$ force de réaction appliquée par le sol sur la roue, $F_f$ force latérale créée par les pneus lors du braquage, $\gamma_{pneumatique}$ chasse due à la torsion du pneus .....	39
Figure 2. 11 : Carte des pôles du système, évolution avec le changement de l'angle d'inclinaison $\theta$ .....	47
Figure 2. 12 : Carte des pôles du système, évolution avec le changement de la vitesse $V_x$ (m/s) .....	48
Figure 2. 13 : Carte des pôles du système, évolution avec le changement de V et $\theta$ simultanément .....	49
figure 2. 14 : Transfert entre $\delta$ et $\theta$ , pour $v_x = 10m/s$ .....	49
Figure 2. 15 : Transfert entre $M_t$ et $\theta$ , pour $v_x = 10m/s$ .....	50
Figure 2. 16 : Variation du transfert entre $\delta$ et $\theta$ pour une variation de $v_x$ .....	50
Figure 2. 17 : Variation du transfert entre $M_t$ et $\theta$ , pour une variation de $v_x$ .....	51
Figure 3. 1 : Masse $M$ dans un repère de coordonnées cylindriques .....	57
Figure 3. 2 : Vue arrière du véhicule ; accélération latérale et accélération perçue (en boucle ouverte) .....	60
Figure 3. 3 : Différentes valeurs de $a_{lat}$ au cdg d'un VEI de largeur $b$ .....	63
Figure 3. 4 : Accélérations au centre de gravité .....	64
Figure 3. 5 : L'angle d'inclinaison $\theta$ correspond à $a_{per} = 0$ ; $a_g$ est selon l'axe ( $z'$ ) et $a_{lat} \cos \theta = g \sin \theta$ lorsque $\eta = 0$ .....	64

Figure 3. 6: $F_n$ et $F_{le}$ sont les forces latérales appliquées sur le pneu. $R_{z-ri}$ et $R_{z-le}$ sont les réactions du sol lorsque $a_{lat}=0$ , et $R'_{z-ri}$ et $R'_{z-le}$ les réactions du sol en virage .....	66
Figure 3. 7 : Domaine de variation de $a_{lat}$ .....	68
Figure 3. 8 : Positions d'inclinaison limites du véhicule pour une accélération latérale donnée- nous cherchons à calculer $\Delta\theta_{min}$ et $\Delta\theta_{max}$ .....	70
Figure 3. 9 : Limites minimale et maximale de l'accélération latérale tolérée pour un angle d'inclinaison $\theta_n$ donné .....	72
Figure 3. 10 : Modalités d'inclinaison du système DTC .....	74
Figure 3. 11 : Système STC, l'angle de braquage est l'angle du conducteur modulé par le signal du contrôleur .....	75
Figure 3. 12 : Trajectoire d'un véhicule étroit ou deux roues, avec phénomène de contre braquage en virage. Les cadres pointillés représentent la position du toit du châssis incliné .....	76
Figure 3. 13 : Phase transitoire du véhicule abordant un virage à $t=t_0$ : accélération latérale croissante, inclinant le véhicule en dehors du virage et nécessitant un couple d'inclinaison $M_i$ plus important .....	86
Figure 3. 14 : Véhicule stabilisé en une position $\theta_{ref}$ proche de la position de stabilité nominale $\theta_n$ - un couple est nécessaire pour maintenir le véhicule dans cette position .....	86
Figure 4. 1 : Construction du modèle standard .....	91
Figure 4. 2 : Problème standard .....	92
Figure 4. 3 : Architecture du contrôleur structuré .....	95
Figure 4. 4 : Entrées/ sorties du procédé .....	103
Figure 4. 5 : Allure type de $\delta(t)$ ; modèles du 1 <sup>er</sup> et 2 <sup>nd</sup> ordre, avec $x_{w0}=1, \alpha_2=1$ .....	108
Figure 4. 6: Trajectoire du véhicule dans le plan (XY) de la route .....	111
Figure 4. 7 : Angle de braquage .....	112
Figure 4. 8 : Angle d'inclinaison du véhicule, signal de commande et accélération perçue résultants de la simulation du MODELE LINEAIRE et Régulateur 1 .....	115
Figure 4. 9 : Angle d'inclinaison du véhicule, signal de commande et accélération perçue résultants de la simulation du MODELE NON LINEAIRE et Régulateur 1 .....	116
Figure 4. 10 : valeurs des états du système- simulation du MODELE NON LINEAIRE et Régulateur 1 .....	117
Figure 4. 11 : Tracé de Bode du système en boucle ouverte (rétroaction positive) .....	117
Figure 4. 12 : Angle d'inclinaison du véhicule, signal de commande et accélération perçue résultants de la simulation du modèle non linéaire, avec un modèle prédicteur de l'angle de braquage du 1 <sup>er</sup> et du 2 <sup>nd</sup> ordre, $Q=8.10^4$ .....	118
Figure 4. 13 : Valeurs des variables d'état du véhicule avec un modèle prédicteur de l'angle de braquage du 1 <sup>er</sup> et du 2 <sup>nd</sup> ordre, $R=1, Q=8.10^4$ .....	119
Figure 4. 14 : Impact de l'angle d'inclinaison sur la trajectoire du véhicule .....	119
Figure 4. 15 : Angle d'inclinaison du véhicule, signal de commande et accélération perçue résultants de la simulation du modèle NL, à $V_x=8m/s$ .....	122
Figure 4. 16 : Trajectoire du véhicule .....	123
Figure 4. 17 : Tracé de bode du système avec régulateur en boucle ouverte - rétroaction positive .....	123
Figure 4. 18 : Représentation LFT des incertitudes de modélisation du système en boucle fermée .....	125
Figure 4. 19 : Schéma d'analyse de la robustesse de la stabilité .....	125
Figure 4. 20 : Interprétation de la valeur singulière structurée .....	126
Figure 4. 21 : Etude de la robustesse de la stabilité .....	127

Figure 4. 22 : Norme $H_2$ du transfert $\ T_{zw}\ _2$ du contrôleur interpolé $R^{(4)}(V)$ et des contrôleurs $R^{(4)}_{V_i}$ synthétisés à $V_i \in \Omega$ .....	130
Figure 4. 23 : Profil de la vitesse longitudinale et de l'angle de braquage du conducteur .....	132
Figure 4. 24: Angle d'inclinaison du véhicule, signal de commande et accélération perçue résultants de la simulation du régulateur $R^{(4)}_V$ indépendant de la vitesse et du régulateur $R^{(4)}(V)$ .....	133
Figure 4. 25 : Trajectoire du véhicule .....	134
Figure 4. 26 : (copie) : Construction du modèle standard .....	138
Figure 5. 1 : Architecture du régulateur STC .....	137
Figure 5. 2 : Entrées/ sorties du procédé .....	140
Figure 5. 3 : Angle de braquage appliqué aux roues, $\delta = \delta_r + \delta_{cond}$ ; contre braquage visible sur la figure du bas. ....	143
Figure 5. 4 : Signal de commande et accélération perçue résultants de la simulation du modèle NL, à $V_x = 8\text{m/sec}$ . ....	144
Figure 5. 5 : Valeurs des états du système .....	145
Figure 5. 6 : Trajectoire du véhicule (haut)- zoom sur la phase transitoire (bas) .....	146
Figure 5. 7 : Accélération latérale due au mouvement curviligne (circulaire) .....	147
Figure 5. 8 : Etude de la robustesse de la stabilité du régulateur D, pour des variations de la masse allant jusqu'à 50%. ....	150
Figure 5. 9 : Etude de la robustesse de la stabilité du régulateur SD, pour des variations de la masse allant jusqu'à 50%. ....	150
Figure 5. 10 : Etude de la robustesse de la stabilité du régulateur S, pour des variation de la masse allant jusqu'à 50%. ....	151
Figure 5. 11 : Régulateur S .....	152
Figure 5. 12 : Régulateur D .....	153
Figure 5. 13 : Régulateur SD .....	153
Figure 5. 14 : Vitesse longitudinale variable .....	155
Figure 5. 15 : Angle de braquage appliqué au véhicule .....	155
Figure 5. 16 : Angle d'inclinaison du véhicule, signal de commande et accélération perçue. ....	156
Figure 5. 17 : Trajectoire correspondante du véhicule .....	157
Figure 6. 1 : Système Non Linéaire, avec ses entrées de commande $u$ et ses sorties $s$ non plates .....	162
Figure 6. 2 : Linéarisation entrées/états par bouclage .....	162
Figure 6. 3 : Modèle bicyclette dans le plan (XY) .....	170
Figure 6. 4 : Position (gauche) et vitesse (droite) du centre de gravité dans le plan $(y',z')$ par rapport à son projeté $G'$ sur l'axe $z'$ .....	171
Figure 6. 5 : Vue du véhicule dans le plan $(y_s, z_s)$ pour $x_s = -J / (ml_f)$ .....	171
Figure 6. 6 : Système linéarisé équivalent au système NL couplé avec le compensateur .....	174
Figure 6. 7 : Comparaison entre système linéarisé et découplé et chaînes d'intégrateurs .....	179
Figure 6. 8 : Trajectoire correspondante du véhicule .....	180
Figure 6. 9 : Architecture du contrôleur .....	181
Figure 6. 10 : Angle de braquage et force de propulsion conducteur et en sortie du compensateur du véhicule avec contrôleur NL. ....	185
Figure 6. 11 : Vitesse et trajectoire du véhicule avec les contrôleurs NL et LPV .....	186
Figure 6. 12 : Angle d'inclinaison, couple d'inclinaison, accélération latérale perçue et accélération latérale du véhicule avec les contrôleurs NL et LPV .....	187



# Acronymes

VEI : Véhicule Etroit et Incluable

NTV : Narrow Tilting Vehicle (Véhicule Etroit et Incluable).

DDL : Degré De Liberté

DTC : Direct Tilt Control

STC : Steering Tilt Control

SDTC : Steering and Direct Tilt Control

NL : Non linéaire

PID : proportionnel intégrateur dérivé / PD : proportionnel dérivé

Cdg : centre de gravité

BF : basse fréquence

HF : haute fréquence

## Notations

$G$  : Centre de gravité du véhicule,

$D$  : Projection de  $G$  au niveau du sol lorsque le véhicule est vertical/ contact roue-sol.

$v$  : vitesse du véhicule

$h$  : Hauteur du centre de gravité

$\beta$  : Angle de dérive du véhicule ; entre l'axe longitudinal du véhicule et la vitesse  $v$

$\psi$  : Angle de lacet du véhicule

$r$  : Vitesse de lacet,  $r = \dot{\psi}$

$\theta$  : Angle d'inclinaison du véhicule

$y$  : Distance latérale du véhicule de son centre de rotation instantané

$\delta$  : Angle de braquage imposé par le conducteur

$M_t$  : Couple d'inclinaison appliqué par un actionneur dédié (systèmes DTC)

$M_s$  : Couple de rappel

$C_f / C_r$  : Coefficient de raideur de dérive des roues avant et arrière respectivement

$\lambda_f / \lambda_r$  : Raideur de carrossage des roues avant et arrière respectivement

$I_x / J$  : Inertie selon l'axe  $x$  et  $z$  respectivement

$I_{roue-i}$  : Inertie des roues selon l'axe  $i$

$\eta$  : Angle de devers de la route

$\rho$  : Angle de chasse des roues

$\gamma$  : Distance de chasse

$m$  : Masse du véhicule

$g$  : Gravité

$V / V_x / V_y$  : Respectivement, vitesse totale, selon les axes longitudinal et latéral du véhicule,

$F_{ijk}$  : Forces de contact roues sol dans le plan de la route, avec  $i, j$  ou  $k \in [f, r, ri, le, s, l]$

$R_{z-i-j}$  : Réactions verticales du sol (selon l'axe ( $z$ )) sur les roues, avec  $i$  ou  $j \in [f, r, ri, le, s, l]$

$f$  : avant (front)

$r$  : arrière (rear)

$ri$  : droite (right)

$le$  : gauche (left)

$s$  : latéral (side)

$l$  : longitudinal (longitudinal)

## Tables des Matières : Titres des chapitres

Introduction Générale.....	14
Chapitre 1.....	19
Chapitre 2    Modèle du Véhicule Etroit et Inclinaire .....	26
Chapitre 3    Commande des véhicules inclinables : formalisation du problème et états de l’art .....	55
Chapitre 4    Stratégie de Commande DTC.....	90
Chapitre 5    Stratégie de commande SDTC .....	136
Chapitre 6    Approche NL : commande par platitude des systèmes SDTC.....	159
Chapitre 7    Conclusion et perspectives .....	189
Références .....	192
Annexes .....	197

# Tables des Matières

Introduction Générale .....	14
1. Contexte et motivations.....	14
2. Systèmes d'inclinaison DTC et STC .....	16
3. Plan du mémoire.....	17
4. Listes des publications.....	18
Chapitre 1.....	19
Chapitre 2   Modèle du Véhicule Etroit et Inclinaison .....	26
1. Introduction .....	26
2. Modèle de validation (32 DDL) .....	29
3. Modèle bicycle (dynamiques latérales et longitudinales - 5DDL).....	31
4. Modèle bicyclette avec dynamiques latérales (3DDL) .....	40
5. Modèle bicycle linéarisé (3DDL) .....	42
6. Retour sur les modèles de synthèse utilisés en littérature .....	52
7. Conclusion.....	54
Chapitre 3   Commande des véhicules inclinables : formalisation du problème et états de l'art.....	55
1. Conditions de stabilité et confort des passagers.....	55
2. Calcul de l'accélération latérale .....	57
3. Etude de l'accélération latérale perçue.....	61
4. Etude du transfert de charge.....	65
5. Calcul de l'intervalle d'inclinaison assurant la stabilité vis-à-vis d'une accélération latérale donnée .....	69
6. Calcul de l'intervalle de variation de l'accélération latérale tolérée en inclinaison pour $\theta$ donné.....	71
7. Différentes stratégies pour le contrôles latéral des VEI. ....	73
8. Entrées de commande et moyens d'action : DTC et STC .....	74
9. Etat de l'art des systèmes DTC, STC, et SDTC .....	79
10. Systèmes DTC et SDTC : synthèse des difficultés et solutions .....	85
11. Conclusion.....	88
Chapitre 4   Stratégie de Commande DTC .....	90
1. Introduction .....	90
2. Démarche méthodologique retenue .....	91
3. Commande des systèmes DTC.....	99
4. Véhicules inclinables : le modèle d'évolution du procédé et les mesures et signaux disponibles..	100
5. Synthèse de régulateurs d'accélération latérale.....	105
6. Stratégies de commande DTC – Résultats.....	111
7. $\mu$ -analyse - Robustesse de la commande vis-à-vis de la variation de la masse.....	124
8. Contrôleur paramétré par la vitesse longitudinale du véhicule .....	128
9. Conclusion.....	134
Chapitre 5   Stratégie de commande SDTC .....	136
1. Introduction .....	136
2. Objectifs du régulateur SDTC.....	137
3. Régulateur SDTC structuré.....	138
4. $\mu$ -analyse - Robustesse de la commande vis-à-vis de la variation de la masse.....	149
5. Contrôleur paramétré par la vitesse longitudinale du véhicule .....	151
6. Conclusion.....	158
Chapitre 6   Approche NL : commande par platitude des systèmes SDTC .....	159
1. Introduction .....	159
2. Système plats – rappel théorique .....	160
3. Sorties plates du modèle à 5DDL .....	164

4.	Sens physique des sorties plates proposées .....	170
5.	Linearisation - calcul du compensateur .....	174
6.	Validation du compensateur linéarisant par simulation de la boucle interne .....	178
7.	Commande par platitude.....	180
8.	Conclusion.....	188
Chapitre 7 Conclusion et perspectives .....		189
Références .....		192
Annexes .....		197

# Introduction Générale

---

## 1. Contexte et motivations

Les embouteillages, surtout urbains, et le manque de places de stationnement sont des problèmes qui s'accroissent significativement d'année en année avec l'utilisation croissante des véhicules privés. Leur nombre sur la planète devrait ainsi doubler entre 1990 et 2025, sachant que la population urbaine devrait elle atteindre plus de 60% en 2030 (Scottish Household 2010). Actuellement, le temps moyen que les conducteurs passent dans les embouteillages urbains vaut  $\frac{1}{4}$  du trajet et un scooter, dans le contexte urbain, est 5 fois plus rapide qu'une voiture. Construire ou agrandir routes et autoroutes est une solution partielle qui pourrait être envisagée, mais qui s'avère extrêmement coûteuse, ne faisant certainement que repousser le problème. D'autre part, l'augmentation de la circulation routière contribue à la crise énergétique ainsi qu'à la pollution atmosphérique causant pour partie maladies respiratoires et réchauffement climatique. Selon l'Agence française de sécurité sanitaire environnementale (AFSSET), la pollution atmosphérique serait responsable chaque année de 6 500 à 9 500 décès en France.

Partant de ce constat, **trois problèmes sont relevés** : trafic routier, consommation d'énergie et pollution. Ce sont trois problèmes majeurs de par leur impact **1/** sur la société : pertes de temps importantes, stress et pertes économiques, **2/** sur les ressources naturelles d'énergies, **3/** ainsi que sur l'environnement.

Outre l'abandon massif des véhicules individuels au profit des transports en commun, qui requiert un changement radical des mentalités difficilement conciliable avec l'urgence, quelles peuvent être les solutions à cette situation ? Une enquête écossaise a interrogé des adultes au sujet de leurs déplacements en 2009/2010 ; 61 % des trajets ont été effectués avec le conducteur seul, 27 % ont été faits avec un passager, 7 % avec deux passagers, 4 % avec trois passagers, et 1 % avec quatre passagers ou plus.

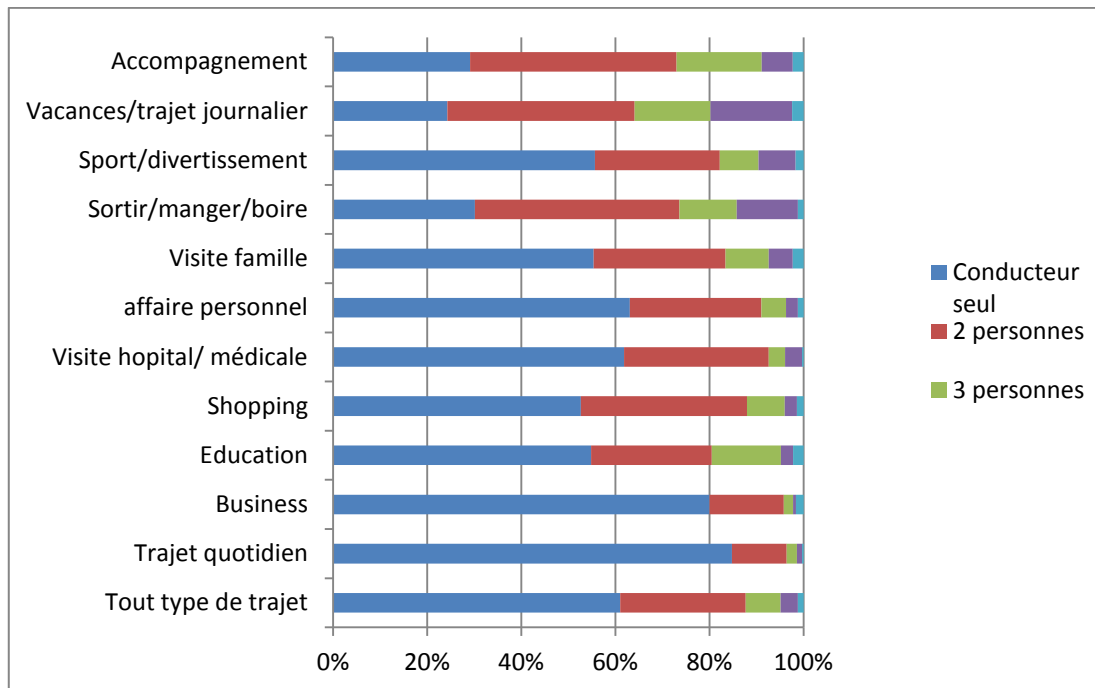


Figure 1.1 : Diagramme de pourcentage du nombre de passagers par type de trajet (Scottish Household 2010)

De plus, comme illustrée par la Figure 1.2 considérant cette fois le cas de la région Ile de France, l'utilisation de la voiture par une personne seule se fait pour 50% des cas sur un trajet de moins de 20 kilomètres (Schulz 2008).

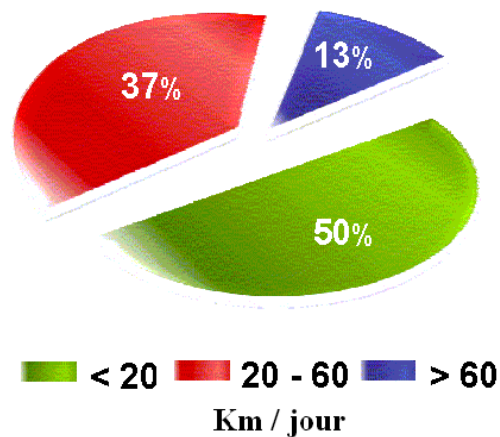


Figure 1.2 :Distance parcourue par un conducteur citadin en île de France (Schulz 2008)

Compte tenu de ces statistiques, l'une des solutions pour résoudre les trois problèmes cités précédemment serait l'utilisation de véhicules étroits. De largeur inférieure de moitié à celle d'un véhicule standard (voitures biplaces en tandem le plus souvent), ils occupent moins d'espace (sur route ou en parking), consomment moins d'énergie (presque 75% de réduction) et *in fine* engendrent moins de pollution.

La dynamique de ces véhicules est différente de celles des voitures conventionnelles. En effet, de par leur étroitesse, et suivant la position de leur centre de gravité, leur dynamique lors de la prise de virage peut s'avérer plus proche de la dynamique des véhicules deux roues comme les motos. Ainsi, certains de ces véhicules doivent s'incliner dans les virages pour compenser l'effet de l'accélération latérale et rester en équilibre. Dans le cas d'une moto, c'est le conducteur qui provoque le mouvement latéral de sa moto, alors que pour ces véhicules plus lourds et encombrants, l'inclinaison doit être automatique.

Cette problématique de la stabilité dans les virages est un enjeu technologique fort pour ces véhicules étroits. Certains constructeurs contournent la difficulté en abaissant au maximum le centre de gravité du véhicule (*cf.* le *Tango* ou la *Twizy*, Chapitre 11.2), par exemple en plaçant les batteries très bas s'il s'agit d'un véhicule électrique. Dans le cas des Véhicules Etroits Inclinaibles (VEI), différentes stratégies d'actionnement et de commande associées à l'inclinaison sont étudiées chez les industriels et laboratoires, et sont présentées ci-dessous (DTC, STC ou SDTC). La problématique de la thèse s'inscrit dans ce contexte, l'objectif étant la conception d'une commande d'inclinaison performante et robuste.

## 2. Systèmes d'inclinaison 'Direct Tilt Control' (DTC) et Steering Tilt Control' (STC)

- Les systèmes **DTC (Direct Tilt Control)** : l'inclinaison est réalisée à l'aide d'actionneurs montés soit directement sur l'axe longitudinal du véhicule, entraînant directement tout ou partie (cabine et roue(s) avant(s)) du véhicule, soit au niveau des suspensions de roues. C'est le système le plus utilisé sur les VEI.
- Les systèmes **STC (Steering Tilt Control)** : ces systèmes contrôlent l'inclinaison par l'angle de braquage des roues (steering) s'inspirant du comportement transitoire de contre braquage des véhicules deux roues. Cette solution n'est que rarement retenue par les constructeurs, car elle se base sur un système steer-by-wire, encore interdit à la commercialisation pour des raisons de normes de sécurité.

En effet les systèmes steer-by-wire sont conçus à la base pour le contrôle de la direction des véhicules classiques. Ce sont des systèmes assez récents. Une étude fondamentale a eu lieu en 1996 dans le cadre du projet européen X-by-wire qui regroupait 7 partenaires industriels et 2 partenaires universitaires (Plankensteiner, 2010). Depuis, plusieurs prototypes ont été construits. Parmi les avantages des systèmes steer-by-wire, citons :

1. Les caractéristiques du braquage (*eg.* Raideur, coefficient de réduction...) peuvent être librement sélectionnées, de manière par exemple à faciliter certaines manœuvres (*eg.* le parking), ou à réduire l'énergie à fournir par le conducteur,



2. L'absence de colonne de direction qui induit une plus grande liberté de conception pour les constructeurs automobiles,
3. La possibilité de réduction des bruits et vibrations sur le volant,
4. Une position variable du siège conducteur, donc plus ergonomique,
5. L'intégration de systèmes d'assistance à la conduite, au maintien dans la voie par exemple.

Parmi les prototypes, seuls les modèles présentant une liaison mécanique de secours ont pu être commercialisés. Les systèmes purement électroniques ne permettent pas encore d'assurer une probabilité d'erreur inférieure à  $10^{-7}$  fautes/heure, ce qui interdit leur commercialisation (Fred 2009). Plus récemment, un groupe de travail sur les systèmes steer-by-wire a défini des standards et des directives pour préciser le cadre légal pour leur commercialisation. La Directive 2007/46/EC', est ainsi en cours d'examen pour approbation. Cette directive permettra la commercialisation de systèmes steer-by-wire sans aucune liaison mécanique.

### 3. Plan du mémoire

En premier lieu, une revue des véhicules étroits (VE) commercialisés ou en phase de conception chez les constructeurs est proposée. Dans ce mémoire, nous nous intéressons aux VEI avec système DTC, mais aussi aux possibilités offertes par un système mixte STC et DTC. Plusieurs contrôleurs seront proposés et comparés, dont la conception s'appuie sur des modèles plus ou moins simplifiés, et la validation sur des modèles un peu plus sophistiqués. La modélisation des VEI fait ainsi l'objet du **chapitre 2** de cette thèse, qui présente différents modèles linéaires et non-linéaires, considérant la dynamique latérale seule ou couplée avec la dynamique longitudinale, généralisant ainsi les résultats de la littérature sur le sujet. Le **chapitre 3** porte sur la définition des objectifs de commande à partir des objectifs fonctionnels et de la compréhension de la dynamique des VEI. Plusieurs voies sont envisageables pour contrôler la stabilité latérale d'un VEI via le pilotage de son inclinaison. Après avoir passé en revue les stratégies de commande proposées dans la littérature, nous proposons une stratégie innovante consistant à piloter directement les accélérations latérales directement mesurables, et prenant en compte l'angle de braquage du conducteur. Notons que l'état de l'art concernant la stabilisation latérale des VEI à été divisé en deux parties : état de l'art sur les modèles au chapitre 2 nous l'avons dit, et état de l'art relatif aux lois de commandes au chapitre 3. Ce découpage a été adopté par souci de clarté : la connaissance de la dynamique des véhicules et des moyens d'action possibles (développés au chapitre 3) étant essentielle à la compréhension des différentes stratégies et solutions envisagées. Sur cette base, la synthèse de trois stratégies de commande différentes est développée aux **chapitres 4, 5 et 6**. La méthodologie de commande préconisée, s'appuyant sur les outils de la commande linéaire robuste, la

modélisation du système et des exosystèmes plus spécifiquement, et l'évaluation de la qualité de la stratégie au travers d'un critère  $H_2$  est d'abord présentée (**chapitre 4**). Elle permet en particulier de formaliser les problèmes sous forme de problèmes de retour de sortie statique structurée, intégrant pondérations fréquentielles et modèle prédictif de l'environnement du véhicule. Elle est appliquée tout d'abord à la synthèse d'un régulateur DTC ne faisant appel qu'aux signaux classiquement mesurables sur un véhicule. Le **chapitre 5** s'intéresse au cas de véhicules pourvus à la fois des systèmes DTC et STC, et propose un régulateur multivariable réalisant un *pilotage coordonné* des deux systèmes, à opposer aux approches rencontrées dans la littérature qui procèdent par *commutation*. Enfin, de manière alternative à l'approche LPV privilégiée dans un premier temps (la vitesse longitudinale est considérée comme un paramètre variant), le **chapitre 6** procède, pour les systèmes SDTC, à la synthèse d'un régulateur non-linéaire, en s'appuyant sur la notion de platitude.

## 4. Listes des publications

Les travaux présentés dans ce mémoire de thèse ont fait l'objet des publications suivantes :

(Mourad et al. 2011) : Mourad, L., Claveau, F. & Chevrel, P., 2011. A Lateral Control Strategy for Narrow Tilting Commuter Vehicle Based on the Perceived Lateral Acceleration. In Proc. IFAC World Congress. Milan, Italy.

Mourad, L., Claveau, F. & Chevrel, P., 2012c. Contrôle actif des accélérations latérales perçues d'un véhicule automobile étroit et inclinable. Présentation à la réunion Groupe de Travail Automatique et Automobile. Versailles, France.

(Mourad et al. 2012b) : Mourad, L., Claveau, F. & Chevrel, P., 2012b. Design of a two DOF gain scheduled frequency shaped LQ controller for Narrow Tilting Vehicles. In Proc. IEEE American Control Conference. Montréal, Canada.

(Mourad et al. 2012a) : Mourad, L., Claveau, F. & Chevrel, P., 2012a. Commande multivariable STC/DTC pour la stabilité latérale de Véhicules Etroits et Inclinables. In Proc. Conférence Internationale Francophone d'Automatique. Grenoble, France.

Ainsi qu'un article de revue en cours de rédaction.

Mourad, L., Claveau, F. & Chevrel, P., 2012d. Control of the lateral dynamics of Narrow Tilting Vehicles: A robust multivariable STC/DTC solution, *I.E.E.E. Transactions on Control Systems* (to be submitted).

# Chapitre 1

---

Chez les constructeurs, plusieurs prototypes de véhicules étroits existent déjà ; certains sont inclinables, d'autres pas. Les différences notables entre les différentes solutions sont :

- Espace conducteur ouvert (dans ce cas nous parlons de scooter 3 ou 4 roues, et le conducteur assure l'inclinaison en virage), ou espace conducteur confiné (le conducteur ne peut pas incliner le véhicule et n'a pas accès au sol à l'arrêt).
- La hauteur du centre de gravité qui, compte tenu de la vitesse longitudinale maximale, est un facteur déterminant quant à la nécessité ou pas de l'inclinaison du véhicule en virage pour maintenir la stabilité.
- Le nombre de roues, 3 ou 4. Ces roues peuvent être inclinables ou non.

Nous présentons ci-dessous des véhicules étroits à trois et quatre roues, inclinables ou pas. Pour identifier facilement les différents types, la notation suivante est adoptée ' $nFtP,S$ ' avec  $n$  le nombre de roues à l'avant,  $t$  le nombre de roues inclinables,  $p$  le nombre de passagers incluant le conducteur, et  $S$  la vitesse maximale en  $Km/h$ . l'acronyme 'NR' correspond à 'Non Renseigné' lorsque le véhicule est encore en phase d'étude ou de prototypage.

## 1.1. Véhicules étroits à trois roues

*GM Lean Machine* (1F1T,1P,125) (cf. Figure 1.3) a été développé par Frank Winchell de General Motors aux **Etats Unis** au **début des années 80**. La stabilité latérale du véhicule doit être assurée par le conducteur, ce à travers une pédale qui contrôle l'inclinaison.

*Mercedes Life Jet F300* (2F3T,2P,210) (cf. Figure 1.4), a été présenté pour la première fois en **1997**, par le constructeur **allemand Mercedes-Benz**, au Frankfurt Motor Show. L'inclinaison est automatisée, par le biais d'actionneurs hydrauliques. Ce véhicule n'a jamais été commercialisé.

*Mp3 et Mp3 Hybrid* Piaggio (2F3T,1P,145) (cf. Figure 1.5), est un scooter à trois roues. C'est le premier véhicule inclinable à trois roues commercialisé en **2006** par le constructeur **italien Piaggio**. Il rencontre un très grand succès (meilleure vente de scooter 125 cc en France en 2009). En particulier, le Piaggio MP3 Hybrid possède une propulsion « hybride » parallèle, sur la base

d'un moteur thermique de 125 cm<sup>3</sup> et d'un moteur électrique de 3,4 chevaux. Ce véhicule, comme un scooter traditionnel, est incliné directement par le conducteur.

**Carver One** (1F1T,2P,185) (cf. Figure 1.6), véhicule trois roues inclinable, né d'un premier concept de véhicule caréné aérodynamique. Des compromis importants ont été faits et font que le Carver One se trouve pourvu d'un groupe moto-propulseur automobile et donc avec un train arrière large non inclinable. Le Carver One est construit par **Carver Europe** (précédemment Vandenbrink), aux **Pays Bas**, et a été officiellement commercialisé en **2007**. En 2009 Carver Europe déclare faillite vu les faibles demandes et le coût élevé du véhicule (30.000 €). La dynamique du véhicule se base sur la technologie brevetée DVC 'Dynamic Vehicle Control', dont il est dit qu'elle assure la stabilité du véhicule en inclinant le véhicule dès l'entrée du virage, à opposer à un contrôle réactif qui induirait un retard (Carver 2007).

**BMW Simple** (1F3T,2P,200) (**Allemagne**) acronyme pour "A Sustainable and Innovative Mobility Product for Low Energy consumption", est un tricycle en cours de développement, dont le projet a démarré en **2005**. Sa carrosserie est optimisée et atteint un coefficient de pénétration dans l'air ( $C_x$ ) de 0,18. Pour se mouvoir avec précision, la technologie pendulaire est utilisée pour tenir en équilibre le véhicule, activant les actionneurs hydrauliques en virages.

**CLEVER** (Compact Low Emission VEHICLE for uRban transport) (1F1T,2P,80), est un projet de véhicule créé en 2002. Il a été développé à l'**université de Bath (UK)**, en collaboration avec **BMW** et plusieurs partenaires Européens. L'inclinaison du module avant du véhicule est possible grâce aux actionneurs hydrauliques liant la cabine à la partie arrière non inclinable. Les premiers prototypes ont été construits en **2006**, mais les comportements transitoires de ce véhicule ne garantissaient pas toujours la stabilité latérale. Depuis 2012, de nouvelles pistes de contrôle latéral sont en cours de développement (Bath University 2002).

**Tilter** (1F3T,2P,110) (cf. Figure 1.7), est un véhicule 100% électrique et entièrement caréné développé par la société **SynergEthic**, en **France**. L'inclinaison du Tilter dans les virages est pilotée automatiquement par des moteurs au niveau des roues. Il a été présenté pour la première fois au Salon international de l'automobile de Genève de **2011**. Sa mise en vente sur le marché est annoncée courant **2013** (SynergEthic 2007).

**Véléance tri'ode** (2F3T,1P,45) (cf. Figure 1.8), est un scooter 100% électrique, dont l'inclinaison est automatique grâce à un système hydro-électronique breveté. Il est construit en **France** par la société **Véléance**. La vitesse maximale de ce véhicule est de 45Km/h seulement. Ce véhicule est commercialisé depuis **2011** (Véléance 2011).

**Torga** (1F3T,2P,150) (cf. Figure 1.9), est un scooter inclinable en cours de développement. Le projet a débuté en **2007** en **France**, sur la base des connaissances techniques développées lors du projet **Pulsar**. La rotation du balancier de ce scooter est commandée par le déplacement d'un vérin hydraulique alimenté par une pompe elle-même entraînée par le moteur. Son débit

est contrôlé par un organe de distribution dont la position est fonction de la volonté du conducteur (Torga 2007).



**Figure 1. 3 : GM Lean Machine**



**Figure 1. 4 : Mercedes Life Jet F300**



**Figure 1. 5 : MP3 Piaggio**



**Figure 1. 6 : Carver One**



**Figure 1. 7: Tilter**



**Figure 1. 8: Véléance**





Figure 1. 9 : Torga



Figure 1. 10: Véléance quad'ode

## 1.2. Véhicules étroits à quatre roues

*Tango*, (2F0T,2P,240) (cf. Figure 1.11), est un véhicule électrique développé par «Commuter Cars» aux **Etats-Unis**, dévoilé à l'Exposition Auto LA **2004**. Pour l'anecdote, l'acteur américain Georges Clooney fut le premier à acheter ce véhicule en 2005, commercialisé à \$180000. Ce véhicule n'est pas inclinable mais son architecture mécanique fait que son centre de gravité est proche du sol (Tango 2004).

*Toyota PM*, (2F0T,1P, NR) (cf. Figure 1.7), présentée au Tokyo **2003** Motorshow, est basée sur le concept PM « Personal Mobility », concept qui prévoit l'utilisation du transport personnel dans des villes engorgées. Ce véhicule, selon le mode de fonctionnement et la vitesse longitudinale, peut changer de dimension et passer d'une position basse du conducteur avec une extension maximale de sa longueur (centre de gravité proche du sol) à relativement grandes vitesses, à une position plus élevée du conducteur et une largeur réduite pour des déplacements plus restreints. Ce véhicule n'est pas inclinable (Toyota PM 2003), Figure 1. 17.

*Volvo Tandem* (2F0T,2P, NR) (cf. Figure 1.12). En mai **2004** le centre de conception et de contrôle (VMCC) en **Californie du sud** a annoncé un nouveau concept de véhicule, appelé le Tandem. Ce prototype est conçu de sorte à avoir un centre de gravité très bas pour garantir la stabilité en virage. Aucune date de commercialisation n'est annoncée.

*Prodrive Naro* (2F4T,2P,NR) (cf. Figure 1.13), concept de véhicule inclinable annoncé en **2005** par Prodrive au **Royaume Uni**. Le projet est encore au stade de recherches fondamentales. Les recherches concernant le système d'inclinaison ont été entamées en

2005, et plusieurs brevets ont été déposés, mais aucun résultat final ne semble encore validé. Ces recherches se basent sur un système d'inclinaison 'steer-by-wire' inspiré du comportement des véhicules à deux roues, et plus précisément du phénomène de 'contre braquage'. Aucune date de commercialisation n'est prévue à ce jour (Prodrive 2005).

*Commuter* (2F4T,2P,NR) (cf. Figure 1.18) de **Rainbow System, France** est un projet en cours. Le constructeur s'intéresse surtout à la carrosserie, brevetée, modulable fermée ou ouverte permettant la conduite à l'air libre, sans casque, ni vêtements de protection. Le concept annonce un véhicule inclinable, sans plus de précision (Commuter 2012).

*Twizy*, (2F0T,2P, 45 ou 80) (cf. Figure 1.14) de **Renault, France**, est un véhicule 100% électrique, dévoilé en septembre 2009 et **commercialisé en 2012** pour un prix variant entre 7000 et 8500 € selon la version. Il existe deux versions de Twizy, l'une atteignant une vitesse maximale de 45Km/h, ne nécessitant aucun permis de conduire, la deuxième pouvant atteindre la vitesse de 80Km/h mais avec permis. Pour assurer sa stabilité latérale, les batteries sont posées sous le siège du conducteur pour abaisser le centre de gravité du véhicule (Renault 2012).

*Smera* (2F4T,2P,110) (cf. Figure 1.15) de **Lumeneo, France** est un véhicule électrique dont le prototype a été présenté au salon de l'auto de Genève et de Paris en **2008**. Un actionneur monté sur la lyre du véhicule réalise l'inclinaison. La Smera devrait bientôt entrer en phase de commercialisation, pour un prix de 25000 € (Lumeneo 2008).

*Land Glider*, (2F4T,2P,100) (cf. Figure 1.16) de **Nissan**, est un « concept car » électrique présenté en **2009** au Tokyo Motor Show. Des capteurs sont intégrés dans les roues qui évaluent en permanence l'angle nécessaire à faire prendre aux roues pour négocier les virages sans problèmes. La production était prévue pour 2010, mais le véhicule ne semble pas encore commercialisé à ce jour.

*Quat'Ode* (2P4T,1P,X) (cf. Figure 1.10) de **Véléance** est un véhicule à quatre roues pouvant également s'incliner en virage et destiné aux livraisons en centre ville. La technologie employée découle directement du **Tri'Ode** à trois roues présenté ci-dessus. Ce projet en est au stade de la réalisation d'un prototype démonstrateur (Véléance 2011).



**Figure 1. 11 : Tango**



**Figure 1. 12 : Volvo Tandem**



**Figure 1. 13 : Prodrive Naro**



**Figure 1. 14: Twizy- Renault**



**Figure 1. 15: Smera - Lumeneo**



**Figure 1. 16: Land Glider**



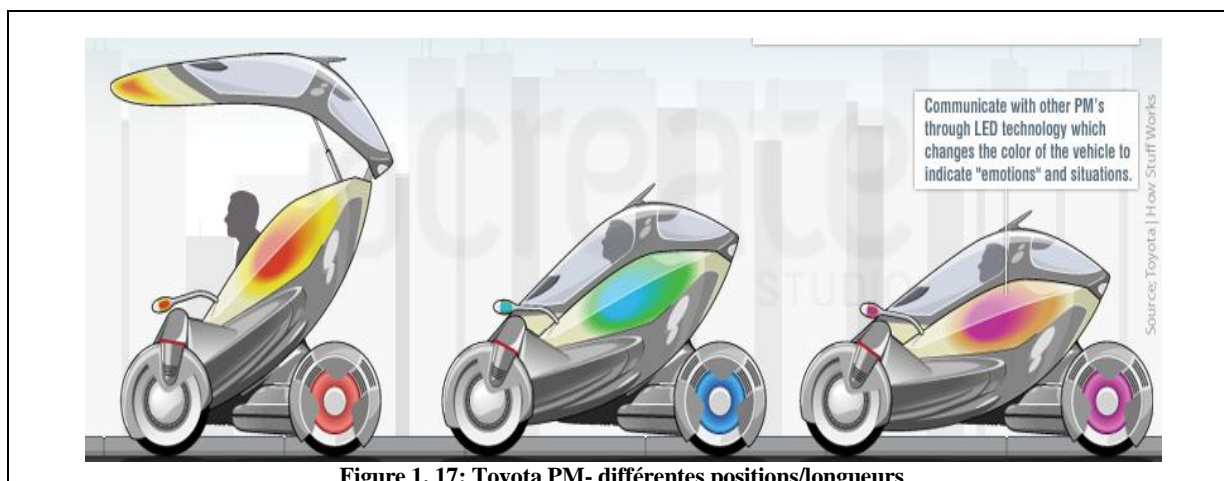


Figure 1. 17: Toyota PM- différentes positions/longueurs



Figure 1. 18: Commuter (Rainbow Systems)

On citera encore d'autres projets d'automobiles étroites à quatre roues : volkswagen L1 (Allemagne), Next-ère (France), Ducati (Italie), Gazelle Phillip Jams (Australie), Ligier (France), Itri Ecooter (Taïwan), Assystem Franco Sbarro (France), Twotwo car concept (Allemagne), Suzuki Sharing Coach (Japon)....

Malgré tous les avantages des véhicules étroits, deux seulement parmi les véhicules trois roues sont actuellement commercialisés (le tri'ode et le Mp3) et deux quatre roues (le Tango et la Twizy). Ceci peut s'expliquer par des raisons de sécurité, notamment au niveau de la stabilité latérale en virage. Ainsi le problème est moindre dans le cas du trio'ode car il ne peut atteindre que des vitesses limitées (45 Km /h) et le Mp3 est un scooter incliné par le conducteur. De même, pour contourner la problématique de l'inclinaison des véhicules quatre roues, le Tango et la Twizy sont conçus de sorte à avoir un centre de gravité proche du sol. Enfin, outre les difficultés purement techniques, la mise en œuvre de systèmes automatisés d'inclinaison peuvent aussi se heurter à des blocages législatifs.

### 1. Introduction

La modélisation est une étape clé pour l'étude et la commande des systèmes. En fonction de l'usage qui en sera fait (positionnement dans le cycle de vie de conception en Figure 2. 1) : modèle embarqué, modèle de conception, modèle de simulation, fin ou non, différents niveaux de complexité sont envisageables.

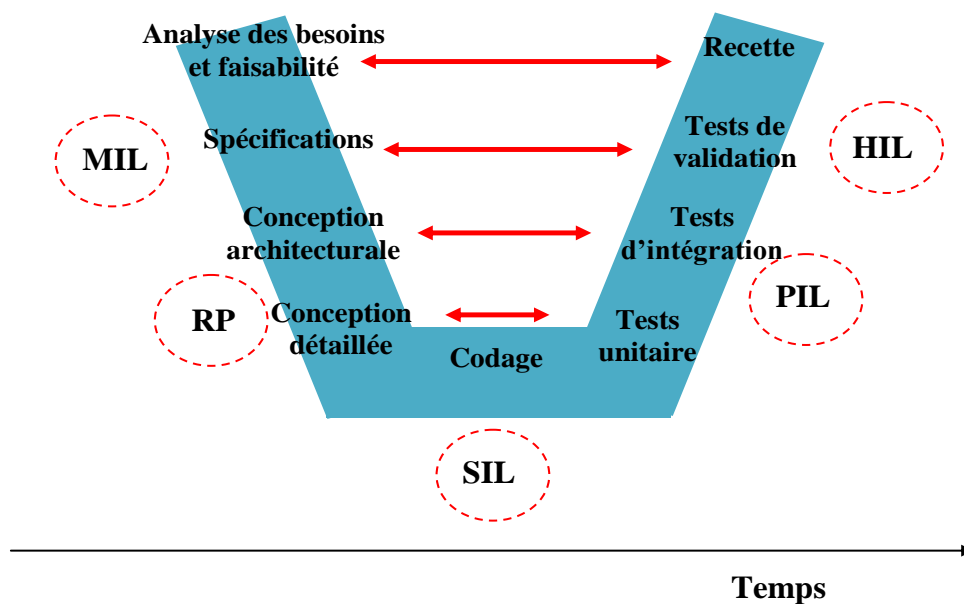


Figure 2. 1 : Architecture du cycle en V

(Moreau & Serrier 2007) propose une classification des modèles en trois niveaux, en fonction de leur complexité :

1. *Modèle de validation/Simulateur* : Ce sont les modèles les plus complets, supports de validation de nouveaux organes et / ou lois de commande. La simulation de ce modèle est l'étape ultime avant l'implémentation et la validation sur le système réel. Dans le domaine automobile, l'utilisation de tels modèles permet d'une part de réduire le

nombre de tests sur véhicule prototype, coûteux, et d'autre part de réaliser des tests pouvant se révéler trop dangereux pour être réalisés dans la réalité.

2. Modèle de compréhension: ces modèles, déduits le plus souvent des modèles de validation, par simplification, visent à comprendre les phénomènes physiques et la dynamique du système. Le modèle de compréhension doit être capable de répondre aux questions suivantes:
  - a. Quelles sont les entrées de commande  $u(t)$  ?
  - b. Quelles sont les perturbations mesurables et non mesurables ?
  - c. Quelles sont les sorties à contrôler?
  - d. Quelles sont les sorties mesurées?
3. Modèle de synthèse: Ces modèles supportent la synthèse des lois de commande, et à ce titre simplifient/ignorent les phénomènes jugés du 2<sup>nd</sup> ordre en regard de la problématique de commande envisagée. En général, les dynamiques négligées sont faiblement couplées avec les dynamiques utiles pour la synthèse.

Schématiquement l'usage des trois modèles est résumé par le schéma de la Figure 2. 2.

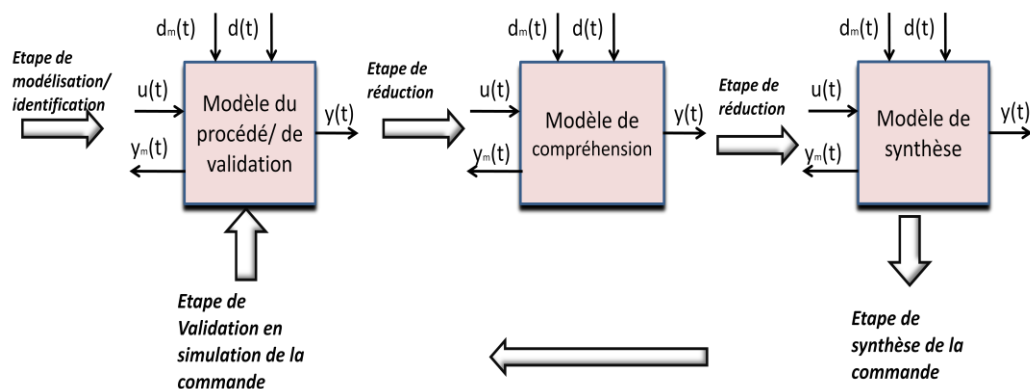


Figure 2. 2 : De la conception à l'intégration d'une loi de commande

Deux principes peuvent être utilisés pour la mise en équation des systèmes étudiés dans ce mémoire:

- Le principe fondamental de la dynamique en translation et en rotation, appelé aussi lois de Newton, qui nécessitent la connaissance des liaisons mécaniques de toutes les forces internes et externes agissant sur le véhicule, et leur points d'application :

$$\sum_i F = ma, \quad \sum_j M = J\ddot{\theta} \quad (2.1)$$

Où  $F$  représente les forces externes appliquées au corps,  $i$  le nombre de ces forces,  $m$  sa masse et  $a$  son accélération.  $M$  les moments externes appliqués au corps,  $j$  le nombre de ces moments,  $J$  son inertie, et  $\ddot{\theta}$  son accélération angulaire.

- Le principe de la moindre action et le formalisme de Lagrange s'appuyant sur le calcul des énergies cinétique  $T$  et potentielle  $V$  :

$$L = T - V, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = F_{q_i} \quad (2.2)$$

où  $q_i$  sont les coordonnées généralisées.

S'appuyant sur ces principes fondamentaux, la méthodologie développée dans le cadre de la robotique pour modéliser les systèmes polyarticulés (Khalil & Dombre 2002) a récemment été mise à profit pour modéliser les systèmes mécaniques complexes tels un véhicule automobile. Introduit initialement pour obtenir les modèles géométriques, cinématiques et dynamiques des robots manipulateurs (historiquement sériels puis parallèles), il consiste à considérer chaque élément mécanique comme un corps, et les liaisons entre ces corps comme des articulations (rotation ou translation). Les efforts au niveau de chaque corps sont ensuite pris en compte pour finalement obtenir un modèle complet au moyen du formalisme de Lagrange

Le modèle résultant est décrit généralement par un système matriciel d'équations du 2<sup>nd</sup> ordre (cf. formalisme de Lagrange) :

$$\Gamma = A(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + Q(q) \quad (2.3)$$

$A(q)$  étant la matrice d'inertie du système,  $C(q, \dot{q})\dot{q}$  le vecteur représentant les efforts de Coriolis et centrifuges,  $Q(q)$  les efforts de gravité, et  $\Gamma$  le vecteur regroupant les couples internes relatifs aux articulations ainsi que les couples externes (possibles entrées de commande).

Dans la suite de ce paragraphe un état de l'art des différents modèles de véhicules étroits inclinables est proposé, ainsi que l'élaboration d'un nouveau modèle intégrant les grandeurs relatives à la problématique de stabilité latérale. Le paragraphe 2 présente un modèle de validation possible (32 ddl) inspiré par le véhicule Smera<sup>®</sup> du constructeur Lumeneo. Suivront ensuite deux modèles dit « bicycle » rendant compte des dynamiques latérales et longitudinales fondamentales (modèle à 5 DDL – cf. paragraphe 3) ou purement latérales (modèle à 3 DDL – cf. paragraphe 4). Ces modèles seront présentés avec différents degrés de simplification (dont linéarisation).

## 2. Modèle de validation (32 DDL)

En ce qui concerne les véhicules inclinables, le simulateur le plus complet que nous connaissions est celui développé à l'IRCCyN, par Salim Maakaroun, pour la voiture Smera de la société Lumeneo (Figure 2. 3), dans le contexte de ses travaux de thèse (Maakaroun 2011). Les modèles cinématiques et dynamiques ont été obtenus de manière systématique en utilisant les outils de la modélisation issus de la robotique ; les différents corps reliés entre eux par les articulations (cercles rouges) sont représenté sur la Figure 2. 4. Chaque ensemble de corps est associé à une couleur illustrée physiquement par les schémas de gauche.



Figure 2. 3 : La Smera, véhicule inclinable en cours de développement par la société lumeneo

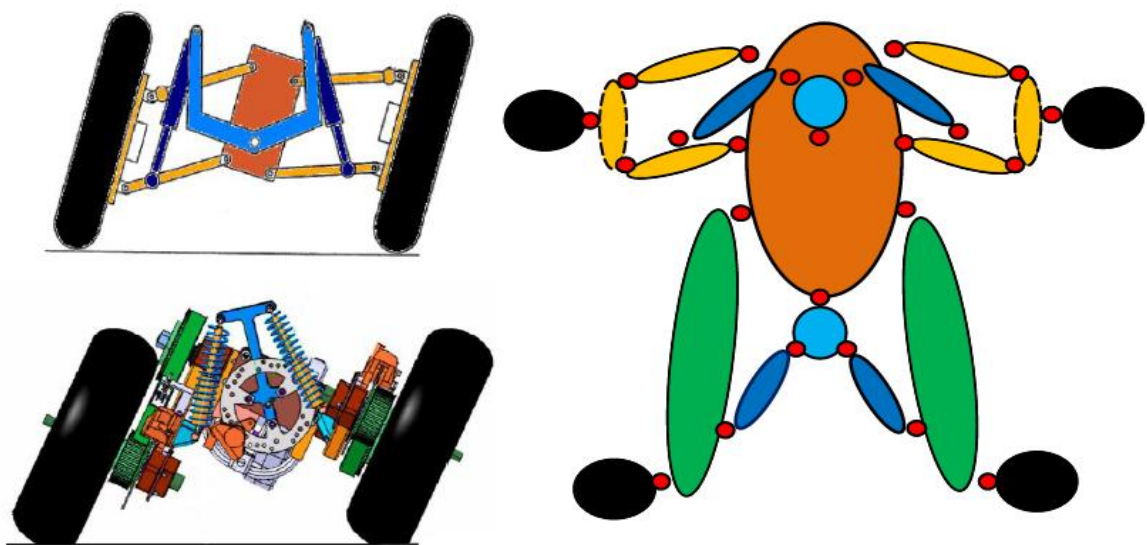


Figure 2. 4 : Schéma multi-corps représentatif du véhicule inclinable (cf. (Maakaroun 2011))

Le modèle finalement obtenu possède  $n=19$  corps (cf. Figure 2. 4) et 32 DDL dont nous citerons les plus importants : 3 coordonnées de positions, 3 coordonnées de rotation du centre de gravité, 1 DDL de translation pour chacune des 4 suspensions, la rotation angulaire de chacune des roues avant et arrière, et l'angle de braquage. Les autres DDL sont relatifs aux articulations entre différentes pièces mécaniques.

La dynamique du système est décrite par l'équation (2.3), où  $\Gamma$  est un vecteur de dimension ( $n \times 1 = 19 \times 1$ ) représentant les couples aux articulations.

**Remarque :** les valeurs des dérivées des coordonnées du centre de gravité ne sont pas exprimées dans le repère absolu, mais dans le repère du véhicule. Pour obtenir les valeurs dans le repère absolu, il suffit de faire un changement de repère en les multipliant par la matrice de changement correspondante :

$R_{ij} = \begin{bmatrix} R_{x1} & R_{y1} & R_{z1} \\ R_{x2} & R_{y2} & R_{z2} \end{bmatrix}$ ,  $x, y, z$  correspondent aux 3 axes du repère et  $j=1,2$  correspondent aux roues avant et arrière respectivement.

Les entrées exogènes du modèle de la Smera sont  $u = [\Gamma_1 \quad \Gamma_2 \quad \Gamma_3 \quad M_i]^T$  avec:

- $\Gamma_1, \Gamma_2$  : Couples appliqués aux roues avant et arrière respectivement,
- $\Gamma_3$  : Couple de braquage,
- $M_i$  : Couple d'inclinaison.

Si la méthodologie de modélisation des systèmes polyarticulés mises en œuvre dans (Maakaroun 2011) permet d'obtenir un modèle (dynamique) complet, considérant toutes les forces internes du véhicule, il faut toutefois lui adjoindre *a posteriori* un modèle des forces de contact roues/sol. En effet, le modèle originel suppose le contact ponctuel, considérant uniquement les forces selon les trois axes, et ignorant les moments générés au niveau de l'aire de contact roues/sol. De ce fait, les moments d'auto alignement, les effets inertiels, et la flexibilité de l'ensemble jante-pneumatique ne sont pas représentés par le modèle originel obtenu à l'aide de l'outil de modélisation robotique SYMORO+® (Khalil & Creusot 1997), logiciel de calcul symbolique développé au sein de l'IRCCyN. Ce logiciel permet en particulier d'obtenir de manière systématique le modèle dynamique direct ou inverse (utilisation de l'algorithme de Newton-Euler) à partir des données d'entrée que sont la description géométrique et inertielle des différents corps et la nature des interconnexions entre eux (pivot, prismatique, etc.)

Cette méthode conduit à des équations littérales trop complexes pour être lisibles ou manipulables. Ce modèle est donc conçu pour la simulation du comportement du véhicule

dans différentes circonstances et pour différents scénarii, et la validation en simulation de l'ajout d'un nouvel organe, d'un changement de dimensionnement, ou d'une loi de commande.

Afin de mieux appréhender le comportement dynamique d'un véhicule inclinable il est nécessaire de disposer d'un modèle plus simple, dit ici **de compréhension**. Nous n'avons pas travaillé sur le modèle de la Smera dans cette thèse, mais avons utilisés des modèles de véhicules plus simples, élaborés à partir de données de la littérature.

### 3. Modèle bicycle (dynamiques latérales et longitudinales - 5DDL)

La commande latérale des véhicules inclinables étant l'objet de notre étude, nous avons choisi de considérer comme modèle conceptuel le modèle dit bicycle qui agrège les 2 roues avant en une seule roue, de même pour les 2 roues arrière. Les couples aux roues sont aussi simplifiés. Ils sont remplacés implicitement par l'angle de braquage.

Nous avons construit ce modèle à 5DDL en nous inspirant :

- du modèles à 3DDL présenté dans (R. Rajamani et al. 2003), dans le plan perpendiculaire à l'axe du véhicule, qui considère la vitesse longitudinale comme un paramètre du modèle et non pas une variable d'état (cf. paragraphe 4),
- du modèle bicycle plan, à 3DDL lui aussi, utilisé dans (Fuchshumer et al. 2005), ne considérant que les dynamiques du « bicycle » dans le plan horizontal ( $XY$ ), sans inclinaison possible.

Le modèle ainsi obtenu prend en compte les dynamiques longitudinales relatives à la vitesse, ainsi que les dynamiques latérales incluant l'inclinaison.

Les Figure 2. 5 et Figure 2. 6 illustrent respectivement les vues dans les plans horizontal et vertical du véhicule. Les grandeurs et notations utilisées ci-dessous sont définis dans la section 'Notations' au début du manuscrit.

Définissons les repères suivants (visualisés sur les Figure 2. 5 et Figure 2. 6):

1. Le repère absolu  $(R) = (X, Y, Z)$  est fixe lié au sol, les axes  $(X)$  et  $(Y)$  définissant le plan du sol tandis que l'axe  $(Z)$  est l'axe vertical.
2. Le repère de véhicule  $(r) = (x, y, z)$  est lié au véhicule. Son origine est le point  $G$ , l'axe  $(x)$  est parallèle à l'axe longitudinal du véhicule, l'axe  $(z)$  est parallèle à l'axe  $(Z)$ , et l'axe  $(y)$  est tel que les plans  $(x, y)$  et  $(X, Y)$  sont parallèles.  $(x, y, z)$  forment un trièdre direct.

3. Le repère  $(r')=(x',y',z')$  est lié au châssis et s'incline avec lui. Il est confondu avec le repère  $(x,y,z)$  lorsque le véhicule est horizontal ; ses axes  $(y')$  et  $(z')$  s'inclinent d'un angle  $\theta$  égal à l'angle d'inclinaison du véhicule.
4. Le repère  $(r_v)=(x_v,y_v,z_v)$  est de centre  $G$ , l'axe  $(x_v)$  est colinéaire et de même sens que la vitesse du véhicule ; l'axe vertical  $(z_v)$  est parallèle à l'axe  $(Z)$ , et l'axe  $(y_v)$  forme avec  $(x_v)$  et  $(z_v)$  un trièdre direct.

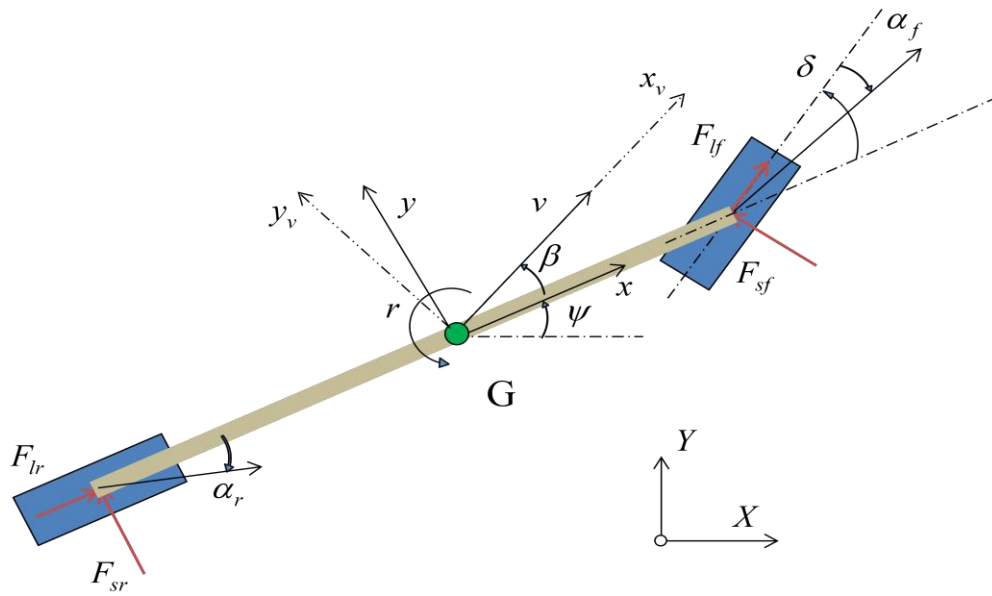


Figure 2. 5: Vue du plan (XY)- les notations sont définies p.9

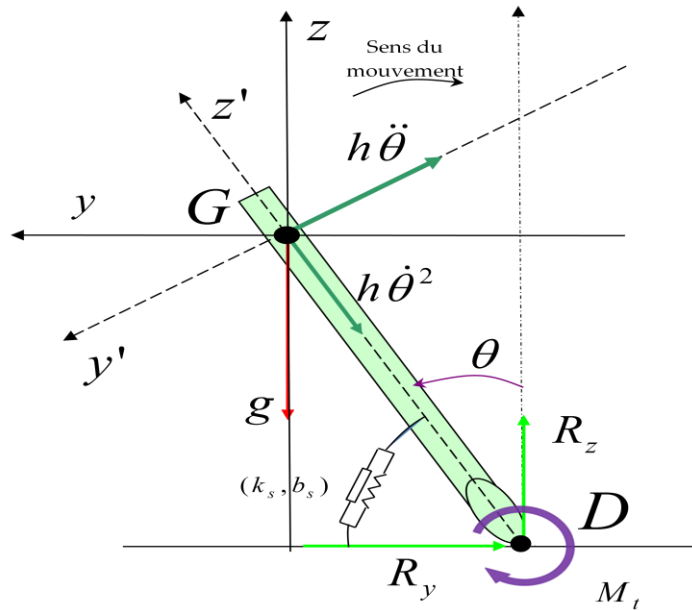


Figure 2. 6: Vue arrière du véhicule dans le plan (YZ)- route plate



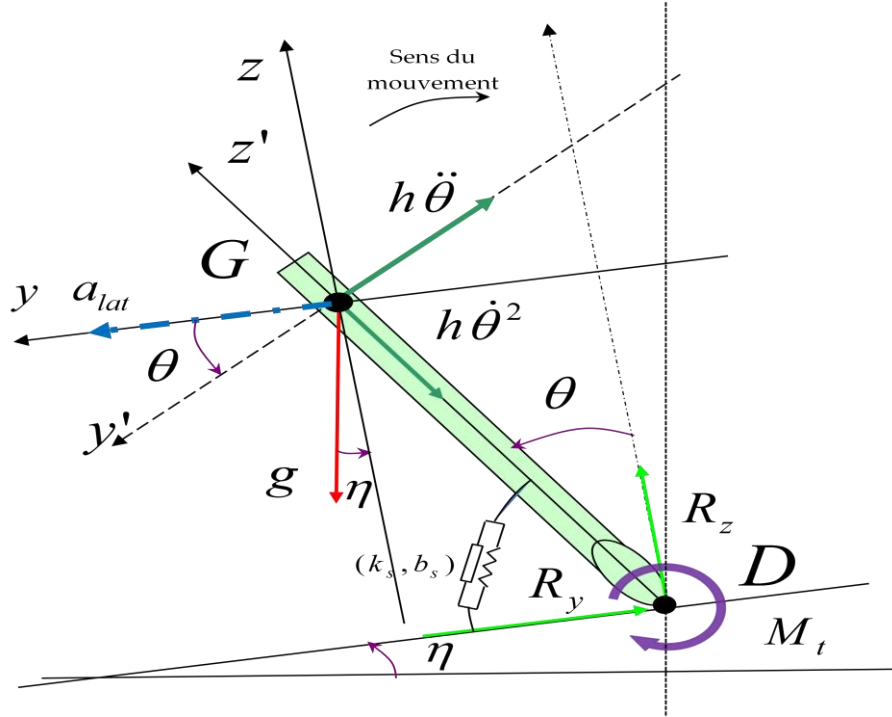


Figure 2. 7: Vue arrière du véhicule dans le plan (YZ)- route avec angle de dévers  $\eta$

### 3.1. Equations du modèle

Pour construire le modèle, on fait appel aux relations de Newton (principe fondamental de la dynamique) : cf. équation (2.1). Commençons pour cela par faire le bilan des forces exercées sur le véhicule :

#### 3.1.1. Forces dans le plan du sol (cf. Figure 2. 5)

- Les forces créées par le contact roues/sol :
  - Les forces *longitudinales* qui sont les forces motrices des roues avant et arrière respectivement  $F_{lf}$  et  $F_{lr}$ . Le conducteur détermine la force motrice totale  $F_l$  (consigne à la pédale d'accélération, et  $\gamma$  est un coefficient de transmission tel que  $F_{lf} = (1-\gamma)F_l$ ,  $F_{lv} = \gamma F_l$ .  $\gamma=1$  correspond à un véhicule à propulsion et  $\gamma=0$  un véhicule à traction.
  - Les forces *latérales* au point de contact roue/sol induisent le virage du véhicule lorsque l'angle de braquage est non nul. Ces forces avant et arrière respectivement  $F_{sf}(v, \beta, r, \delta)$  et  $F_{sr}(v, \beta, r)$ , sont fonctions de la vitesse  $v$ , du glissement  $\beta$ , de la vitesse de lacet  $r$  ainsi que de l'angle de braquage  $\delta$ . Leur

expression sera développée dans le paragraphe 3.2. La résultante de ces forces selon l'axe  $(y)$  du repère  $(r)$  est notée  $R_y$  (cf. Figure 2. 6)).

### 3.1.2. Forces de réaction du sol

- La réaction du sol notée  $R_z$  (cf. Figure 2. 6)

### 3.1.3. Forces et accélérations au centre de gravité du véhicule

- La force créée par l'accélération centripète du mouvement d'inclinaison dans le plan  $(y, z)$  Figure 2. 6. Le cdg  $G$  décrit un arc de cercle de centre  $D$  à vitesse  $v_G = h\dot{\theta}$  avec  $\overline{DG} = h$ . Les accélérations ressenties au niveau de  $G$  sont l'accélération tangentielle  $\frac{dv_G}{dt} = h\ddot{\theta}$  selon l'axe  $(y')$ , et l'accélération normale  $-h\dot{\theta}^2$  selon l'axe  $(z')$ . En projetant ces équations sur les axes du repère  $(r) = (x, y, z)$  on retrouve :

$$a_{G/y} = h\ddot{\theta} \cos \theta - h\dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (2.4)$$

$$a_{G/z} = -h\ddot{\theta} \sin \theta - h\dot{\theta}^2 \cos \theta \quad (2.5)$$

- La raideur  $b_s$  et le coefficient de frottement  $c_s$  créent un moment  $M_s = b_s\theta + c_s\dot{\theta}$  au point  $D$ . Pour être plus facilement manipulé, ce moment est transformé en un couple de forces égales et de sens opposé,  $F_s$  appliqué au niveau du point  $G$ , et  $F_{s/r}$  la réaction au niveau du point  $D$  (Figure 2. 10), avec  $F_s = \frac{M_s}{h} = \frac{(b_s\theta + c_s\dot{\theta})}{h}$ .
- La force de gravité appliquée au centre de gravité du véhicule, toujours verticale.

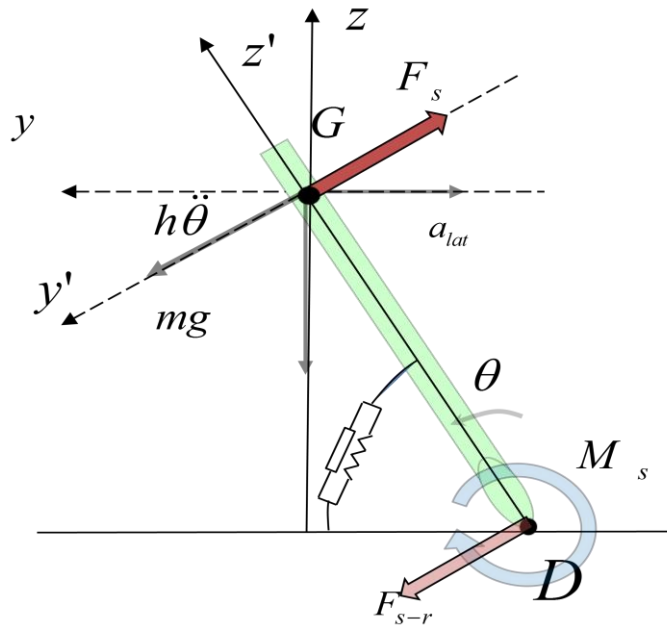


Figure 2. 8 : Le moment  $M_s$  remplacé par les forces  $F_{s-r}$  et  $F_s$

### 3.1.4. Développement des équations

Les relations de Newton développées par rapport aux axes  $x_v, y_v, x, z$  donnent respectivement les équations suivantes :

$$\begin{cases} ma_{x_v} = \sum F_{x_v} & (1) \\ ma_{y_v} = \sum F_{y_v} & (2) \\ I_x \ddot{\theta} = \sum M_\theta + M_t & (3) \\ Jr = \sum M_z & (4) \end{cases} \quad (2.6)$$

En développant ces équations, nous obtenons :

1. (2.6)(1) :  $ma_{x_v} = \sum F_{x_v}$

- a.  $\sum F_{x_v}$  est la somme des projections des forces de contact roues/sol ( $F_{sf}, F_{sr}, F_{lf}, F_{lr}$ ), et de la force engendrée par l'accélération de la gravité en cas de devers  $\eta$  sur l'axe  $(x_v)$  :

$$\begin{aligned} \sum F_{x_v/r-s} &= F_{sf} \sin(\beta - \delta) + F_{lf} \cos(\beta - \delta) + F_{sf} \sin \beta + F_{lr} \cos \beta \\ \sum F_{x_v/g} &= mg \sin \eta \sin \beta \end{aligned}$$

- b.  $a_{x_v}$  est la projection sur  $(x_v)$  de l'accélération du centre de gravité ; elle est égale à l'accélération  $\dot{v}$  au point  $D$ , et de l'accélération relative du point  $G$  par rapport à  $D$  selon l'axe  $(x_v)$ . En utilisant (2.4) nous obtenons:

$$\begin{aligned} a_{x_v} &= a_{D/x_v} + a_{G/y} \sin \beta \\ &= \dot{v} + (h\ddot{\theta} \cos \theta - h\dot{\theta}^2 \sin \theta) \sin \beta \end{aligned}$$

**L'expression (2.6)(1) se réécrit finalement :**

$$m\dot{v} = F_{sf} \sin(\beta - \delta) + F_{lf} \cos(\beta - \delta) + F_{sf}(v, \beta, r) \sin \beta + F_{lr} \cos \beta - m(h\ddot{\theta} \cos \theta - h\dot{\theta}^2 \sin \theta - g \sin \eta) \sin \beta$$

2. (2.6)(2) :  $ma_{y_v} = \sum F_{y_v}$

- a.  $\sum F_{y_v}$  est la somme des projections des forces de contact roues/sol ( $F_{sf}, F_{sr}, F_{lf}, F_{lr}$ ), et de la force engendrée par l'accélération de la gravité sur l'axe  $(y_v)$

$$\begin{aligned}\sum F_{y_v/r-s} &= F_{sf}(v, \beta, r, \delta) \cos(\beta - \delta) - F_{lf} \sin(\beta - \delta) + F_{sf}(v, \beta, r) \cos \beta - F_{lr} \sin \beta \\ \sum F_{y_v/g} &= mg \sin \eta \cos \beta\end{aligned}$$

- b.  $a_{y_v}$  est l'accélération au niveau du centre de gravité, elle est égale à l'accélération au point  $D$  et l'accélération relative du point  $G$  par rapport au point  $D$  selon l'axe  $(y_v)$ . En utilisant (2.4) nous retrouvons :

$$\begin{aligned}a_{y_v} &= a_{D/y_v} + a_{G/y} \cos \beta \\ &= v(\dot{\beta} + r) - (h\ddot{\theta} \cos \theta - h\dot{\theta}^2 \sin \theta) \cos \beta\end{aligned}$$

**L'expression (2.6)(2) se réécrit finalement :**

$$\begin{aligned}mv(\dot{\beta} + r) &= \\ F_{sf} \cos(\beta - \delta) - F_{lf} \sin(\beta - \delta) + F_{sf}(v, \beta, r) \cos \beta - F_{lr} \sin \beta - m(h\ddot{\theta} \cos \theta - h\dot{\theta}^2 \sin \theta - g \sin \eta) \cos \beta\end{aligned}$$

3. **(2.6)(3) :**  $I_x \ddot{\theta} = \sum M_\theta + M_t.$

La rotation du véhicule se fait par rapport à l'axe longitudinal du véhicule passant par  $D$ . Considérons  $R_y$  la résultante de ces forces selon l'axe  $(y)$ , et  $R_z$  la réaction du sol au point  $D$  selon l'axe  $(z)$  (Figure 2. 6). La somme des moments au niveau du centre de gravité s'écrit:

$$\sum M_\theta = R_z h \sin \theta - R_y h \cos \theta.$$

- a.  $R_y$  est la projection des forces de contact roues/sol et des projections des forces de rappel par rapport à l'axe  $(y)$ , elle s'écrit :

$$R_y = F_{sr} + F_{sf} \cos \delta + F_{lf} \sin \delta \quad (2.7)$$

- b. D'autre part l'égalité  $ma_z = R_z - mg \cos \eta$ , avec  $a_z = -(h\ddot{\theta} + \frac{F_s}{m}) \sin \theta - h\dot{\theta}^2 \cos \theta$  conduit à :

$$R_z = mg \cos \eta - m(h\ddot{\theta} + \frac{F_s}{m}) \sin \theta - mh\dot{\theta}^2 \cos \theta \quad (2.8)$$

**Finalement, l'équation (2.6)(3) se réécrit :**

$$\ddot{\theta} = \frac{(hF_s \sin^2 \theta + mgh \cos \eta \sin \theta - mh\dot{\theta}^2 \cos \theta \sin \theta - (F_{sv} \cos \delta + F_{lv} \sin \delta + F_{sh})h \cos \theta + M_t)}{(I_x + mh^2 \sin^2 \theta)}$$

4. **(2.6)(4) :**  $J\dot{r} = J\ddot{\psi} = \sum M_z.$

Ce sont les forces de contact roues/sol qui créent le moment de rotation :

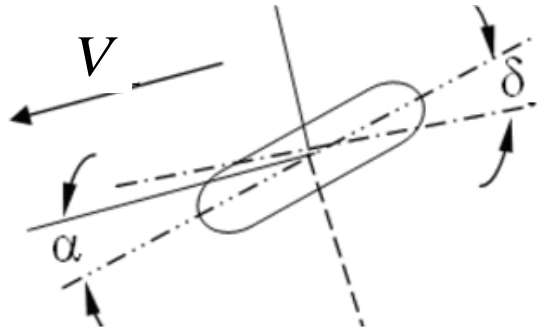
**l'équation (2.6)(4) se réécrit :**  $\ddot{\psi} = \dot{r} = \frac{l_f}{J} (F_{sf} \cos \delta + F_{lf} \sin \delta) - \frac{l_r}{J} F_{sr}$

**Ainsi les équations du modèle à 5DDL incluant dynamiques longitudinales et latérales se résument à :**

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{v} = \frac{1}{m} (F_{sf} \sin(\beta - \delta) + F_{lf} \cos(\beta - \delta) + F_{sr} \sin(\beta) + F_{lr} \cos(\beta)) \\ \quad - (h\ddot{\theta} \cos \theta - h\dot{\theta}^2 \sin \theta - g \sin \eta) \sin \beta \\ \dot{\beta} = -r + \frac{1}{mv} (F_{sf} \cos(\beta - \delta) - F_{lf} \sin(\beta - \delta) - F_{sr} \cos(\beta) + F_{lr} \sin(\beta)) \\ \quad - \frac{1}{v} (h\ddot{\theta} \cos \theta - h\dot{\theta}^2 \sin \theta - g \sin \eta) \cos \beta \\ \ddot{\psi} = \dot{r} = \frac{l_f}{J} (F_{sf} \cos \delta + F_{lf} \sin \delta) - \frac{l_r}{J} F_{sr} \\ \ddot{\theta} = \frac{(hF_s \sin^2 \theta + mgh \sin \theta \cos \eta - mh\dot{\theta}^2 \cos \theta \sin \theta - (F_{sf} \cos \delta + F_{lf} \sin \delta + F_{sr})h \cos \theta + M_t)}{(I_x + mh^2 \sin^2 \theta)} \end{array} \right. \quad (2.9)$$

### 3.2. Calcul de $F_{sf}$ et $F_{sr}$

Nous reprenons les calculs présentés dans (R. Rajamani et al. 2003). Les auteurs supposent un contact ponctuel. Soient les notations suivantes : latérales (side- *s*) avant (front - *f*) droite (right - *ri*) et gauche (left - *le*) . Les forces latérales avant  $F_{sf} = F_{f-ri} + F_{f-le}$  et arrière  $F_{sr} = F_{r-ri} + F_{r-le}$  sont exercées sur les roues grâce au contact roue / sol, et permettent le virage du véhicule. Elles dépendent évidemment de l'angle de braquage  $\delta$ , de glissement  $\alpha$ , ainsi que de la vitesse de déplacement du véhicule  $V$ . Ces grandeurs sont représentées par rapport à la roue sur la Figure 2. 9.



**Figure 2. 9:** Angles de braquage  $\delta$ , de glissement  $\alpha$  et vitesse de déplacement  $V_x$ .

La force latérale exercée sur cette roue s'écrit  $F = C\alpha + \lambda\theta$  avec  $C$  est le coefficient de raideur des roues, et  $\lambda\theta$  est due au carrossage ( $\lambda$  : raideur de carrossage et  $\theta$  angle de roulis de la roue égale à l'angle de roulis du châssis).

Déclinant l'égalité  $\alpha = \delta - \tan^{-1}(\frac{V_y}{V_x})$ , au niveau des roues avant, on obtient

$$\alpha_f = \delta - \tan^{-1}\left(\frac{v \sin \beta + l_f \dot{\psi} - t c \dot{\delta}_f}{v \cos \beta}\right) \approx \delta - \frac{v \sin \beta + l_f \dot{\psi}}{v \cos \beta}. \quad (2.10)$$

L'approximation utilisée dans l'équation (2.10) est obtenue en négligeant l'effet transitoire de  $\dot{\delta}$ , et en approximant aux petits angles  $\tan x = x$ . Cette dernière hypothèse suppose implicitement que  $\alpha - \delta$  reste relativement petit, c.-à-d. lorsque le véhicule se déplace sur une trajectoire ayant un rayon de courbure assez grand, pour les virages larges.

Au final, l'expression des forces latérales associées aux deux roues (avant et arrière) est approximée par :

$$\begin{cases} F_{sf} = F_{f-ri} + F_{f-le} = 2C_f \left( \delta - \frac{v \sin \beta + l_f \dot{\psi}}{v \cos \beta} \right) + 2\lambda_f \theta \\ F_{sr} = F_{s-ri} + F_{s-le} = -2C_r \left( \frac{v \sin \beta - l_r \dot{\psi}}{v \cos \beta} \right) + 2\lambda_r \theta \end{cases} \quad (2.11)$$

Les projections sur l'axe (y) de ces forces de contact sur les roues avant et arrière respectivement s'écrivent :

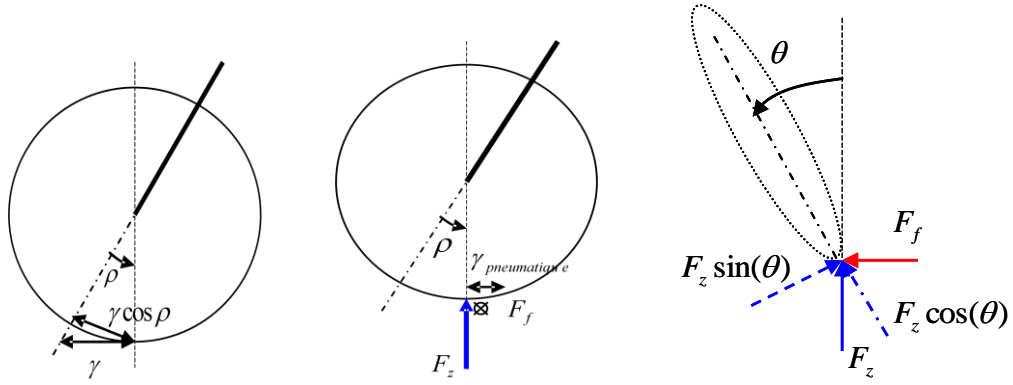
$$\begin{cases} F_f = F_{sf} \cos \delta + F_{lf} \sin \delta \\ F_r = F_{sr} \end{cases} \quad (2.12)$$

### 3.3. Dynamique due à l'angle de chasse et aux moments gyroscopiques des roues

Le calcul de ces moments est présenté dans (R. Rajamani et al. 2003).

#### 3.3.1. Moment de chasse

Jusqu'à présent nous avons considéré l'axe de la roue perpendiculaire au plan du sol. Ceci n'est pas réellement le cas en pratique, l'axe est en général légèrement incliné comme indiqué sur la Figure 2. 10.



**Figure 2.10 : Forces au point de contact roue/sol.**  $\rho$  angle de chasse,  $\gamma$  chasse,  $F_z$  force de réaction appliquée par le sol sur la roue,  $F_f$  force latérale créée par les pneus lors du braquage,  $\gamma_{pneumatique}$  chasse due à la torsion du pneus.

Ainsi, la réaction du sol  $F_z = mg \frac{l_r}{l_f + l_r}$  perpendiculaire au plan du sol, exercera par sa composante  $F_z \sin \theta$ , un moment autour de l'axe de la roue ; de même, la force latérale contribuera à ce moment qui s'écrit de la manière suivante :

Le moment de chasse au niveau des roues s'écrit :

$$M_{chasse} = mg \frac{l_r}{l_f + l_r} \gamma \cos \rho \sin \theta - F_f \cos \theta (\gamma + \gamma_{pneumatique}) \cos \rho \quad (2.13)$$

### 3.3.2. Moments gyroscopiques et dynamique de braquage

Notons aussi l'existence de moments gyroscopiques dus aux rotations simultanées autour des 3 axes du pneu (roulis, lacet, et rotation du pneu dans le sens du mouvement de la voiture). Généralement, les équations dynamiques d'un corps solide à 3 DDL rotationnels, sont dérivées des équations d'Euler :

$$\begin{cases} \sum M_x = I_{xx} \dot{\omega}_x - (I_{yy} - I_{zz}) \omega_y \omega_z \\ \sum M_y = I_{yy} \dot{\omega}_y - (I_{zz} - I_{xx}) \omega_x \omega_z \\ \sum M_z = I_{zz} \dot{\omega}_z - (I_{xx} - I_{yy}) \omega_x \omega_y \end{cases}$$

Ces moments interviennent dans l'expression des forces exercées au niveau des pneus, qui expriment les forces exercées par le sol sur les pneus et les moments gyroscopiques au niveau des pneus.

De meme, la dynamique de braquage, considérant  $M_\delta$  le couple appliqué par le conducteur, s'écrit :

$$2I_{roue-z} \ddot{\delta} = M_\delta + M_{chasse} - 2(I_{roue-x} - I_{roue-y}) \omega (\dot{\theta} - \dot{\delta} \sin \rho) / \cos \rho \quad (2.14)$$

Les équations se trouvent ainsi modifiées selon:

Le modèle 5DDL incluant les moments de chasse et les effets gyroscopiques de roues s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{v} = \frac{1}{m} (F_{sf} \sin(\beta - \delta) + F_{lf} \cos(\beta - \delta) + F_{sr} \sin \beta + F_{lr} \cos \beta) \\ \quad - (h\ddot{\theta} \cos \theta - h\dot{\theta}^2 \sin \theta - g \sin \eta) \sin \beta \\ \dot{\beta} = -r + \frac{1}{mv} (F_{sf} \cos(\beta - \delta) - F_{lf} \sin(\beta - \delta) - F_{sr} \cos \beta + F_{lr} \sin \beta) \\ \quad - \frac{1}{v} (h\ddot{\theta} \cos \theta - h\dot{\theta}^2 \sin \theta - g \sin \eta) \cos \beta \\ \ddot{\psi} = \dot{r} = \frac{l_f}{J} (F_{sf} \cos \delta + F_{lf} \sin \delta) - \frac{l_r}{J} F_{sr} - 2(I_{roue-x} - I_{roue-y})\omega\dot{\theta} - M_\delta \cos \beta \\ \ddot{\theta}(I_x + mh^2 \sin^2 \theta) = (mgh \sin \theta \cos \eta - mh\dot{\theta}^2 \cos \theta \sin \theta - (F_{sf} \cos \delta + F_{lf} \sin \delta + F_{sr})h \cos \theta \\ \quad + M_t + 2(I_{roue-z} - I_{roue-y})\omega(\dot{\psi} + \dot{\delta} \cos \rho) + hF_s \sin^2 \theta) \\ 2I_{roue-z}\ddot{\delta} = M_\delta + M_{chasse} - 2(I_{roue-x} - I_{roue-y})\omega(\dot{\theta} - \dot{\delta} \sin \rho) / \cos \rho \end{array} \right. \quad (2.15)$$

Où :

- $\omega$  est la vitesse de rotation des roues autour de leur axe de rotation parallèle à l'axe (y')
- $M_\delta$  est le couple exercé par le conducteur transmis au niveau de l'axe de la roue
- $M_{chasse} = mg \frac{l_r}{l_f + l_r} \gamma \cos \rho \sin \theta - F_f \cos \theta (\gamma + \gamma_{pneumatique}) \cos \rho$
- $F_{sf} = 2C_f (\delta_f - \frac{v \sin \beta + l_f \dot{\psi}}{v \cos \beta}) + 2\lambda_f \theta$
- $F_{sr} = 2C_r (\delta_r - \frac{v \sin \beta - l_r \dot{\psi}}{v \cos \beta}) + 2\lambda_r \theta$
- $M_t$  est le couple exercé par l'actionneur.

#### 4. Modèle bicycle avec dynamiques latérales (3DDL)

Pour résoudre le problème de stabilité latérale, et afin de pouvoir se focaliser uniquement sur les dynamiques latérales correspondantes, un modèle de synthèse encore plus simplifié est utilisé par les chercheurs. Les moments gyroscopiques et l'angle de chasse sont négligés, ainsi que la dynamique longitudinale. Partant du modèle (2.9), la dynamique longitudinale du modèle est réduite à une vitesse constante  $V_x$  paramétrant le modèle, selon l'axe longitudinal



(x) du véhicule, tel que  $V_x = v \cos \beta$ . Les équations d'évolution de  $v$  et de l'angle de dérive  $\beta$  sont remplacées par celles du glissement latéral du véhicule  $\dot{y} = v \sin \beta$ . En dérivant  $\dot{y}$ , on obtient les projections des dynamiques de  $v$  et  $\beta$  selon l'axe (y) du repère (r). L'équation de l'évolution de  $\dot{y}$  remplace alors celles de  $v$  et  $\beta$  dans , tel que :

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \dot{v} \sin \beta + v \dot{\beta} \cos \beta \\ \ddot{y} &= \frac{1}{m} (F_{sf} \cos \delta + F_{lf} \sin \delta + F_{sr}) - v r \cos \beta - (h \ddot{\theta} \cos \theta - h \dot{\theta}^2 \sin \theta - g \sin \eta) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Les axes (z) et ( $z_v$ ) sont confondus, donc l'équation de  $r = \dot{\psi}$  est conservée, ainsi que l'équation relative à  $\theta$ , qui était initialement établie par rapport à la rotation autour de l'axe (x).

Le modèle latéral obtenu est à 3DDL, il s'écrit :

$$\ddot{y} = \frac{1}{m} (F_{sf} \cos \delta + F_{lf} \sin \delta + F_{sr}) - V_x r - (h \ddot{\theta} \cos \theta - h \dot{\theta}^2 \sin \theta - g \sin \eta) \quad (1)$$

$$\ddot{\psi} = \dot{r} = \frac{l_f}{J} (F_{sf} \cos \delta + F_{lf} \sin \delta) - \frac{l_r}{J} F_{sr} \quad (2) \quad (2.17)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{(h F_s \sin^2 \theta + m g h \sin \theta \cos \eta - m h \dot{\theta}^2 \cos \theta \sin \theta - (F_{sf} \cos \delta + F_{lf} \sin \delta + F_{sr}) h \cos \theta + M_t)}{(I_x + m h^2 \sin^2 \theta)} \quad (3)$$

En approximant  $\delta$  aux petits angles dans les équations des forces de contact roues/sol , nous retrouvons le modèle proposé par Rajamani dans (R. Rajamani et al. 2003) :

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \frac{1}{m} (F_f + F_r) - v r - (h \ddot{\theta} \cos \theta - h \dot{\theta}^2 \sin \theta - g \sin \eta) \\ \ddot{\psi} = \dot{r} &= \frac{l_f}{J} F_f - \frac{l_r}{J} F_r \\ \ddot{\theta} &= \frac{(h F_s \sin^2 \theta + m g h \sin \theta \cos \eta - m h \dot{\theta}^2 \cos \theta \sin \theta - (F_f + F_r) h \cos \theta + M_t)}{(I_x + m h^2 \sin^2 \theta)} \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\text{Avec } \begin{cases} F_f = F_{sf} = 2C_f \left( \delta - \frac{\dot{y} + l_f \dot{\psi}}{V_x} \right) + 2\lambda_f \theta \\ F_r = F_{sr} = 2C_r \left( \delta - \frac{\dot{y} - l_r \dot{\psi}}{V_x} \right) + 2\lambda_r \theta \end{cases} \quad (2.19)$$

## 5. Modèle bicycle linéarisé (3DDL)

Une autre voie de simplification de modèle réside en sa linéarisation par approximation. Un tel modèle, quoique possédant un domaine de validité plus étiqué, peut se révéler extrêmement utile pour la synthèse d'une loi de commande. C'est que la théorie de la commande offre en linéaire des outils de synthèse robuste, puissants, s'appuyant notamment sur l'analyse fréquentielle.

Concrètement, nous cherchons à mettre sous la forme suivante le système défini par (2.18)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (2.20)$$

Avec  $x(t) \in R^n$ ,  $x(t) = [y(t), \dot{y}(t), \psi(t), \dot{\psi}(t), \theta(t), \dot{\theta}(t)]^T$ , ( $\eta = 0$ )

$u(t) \in R^p$ ,  $u(t) = [\delta(t) \quad M_l(t)]^T$  et  $y(t) = x(t)$ .

Il faut noter que cette linéarisation est ponctuelle, autour d'un point de fonctionnement donné. On obtient alors le linéarisé tangent valable au voisinage de ce point uniquement. Lorsque le système s'écarte de ce point, on compte en général sur la robustesse de la loi de commande.

On peut aussi compenser les non linéarités par le biais d'une commande linéarisante (eg. pour les systèmes plats - cf. chapitre 6). Dans ce cas, le modèle linéarisé sera valable sur l'ensemble des points de fonctionnement (sauf aux singularités).

On linéarisera ici en première approximation le modèle (2.18) autour de la verticale :  $\theta = 0$ , obtenant ainsi le modèle utilisé dans la littérature (cf. paragraphe 6 de ce chapitre 2). Pourtant, en ce qui concerne notre système, le point  $\theta = 0$  n'est le point d'équilibre que dans le cas d'une trajectoire rectiligne. Dans le cas contraire c'est une valeur non nulle de  $\theta$  assure la stabilité du véhicule.

Les hypothèses simplificatrices les plus importantes utilisées pour l'obtention du modèle linéarisé, portent sur les variables  $V_x$  et  $\theta$  :

- La vitesse longitudinale est supposée (dans un premier temps) constante, ( $V_x=10\text{m/s}$  le plus souvent), qui est une des hypothèses les plus contraignantes, due au choix d'un modèle excluant les dynamiques longitudinales.
- L'angle d'inclinaison est supposé rester proche de  $\theta = 0$ .

Pour valider (ou non) l'usage de ce modèle simplifié (simplifications dynamiques et linéarisation), nous considérerons plusieurs vitesses et nous linéariserons autour de plusieurs valeurs de  $\theta$ , afin de pouvoir juger ensuite, à partir de l'examen de la carte des pôles et des réponses fréquentielles sur le diagramme de Bode, si ces approximations sont justifiées.

## 5.1. Le modèle linéarisé

Pour obtenir le linéarisé tangent (cf. équation (2.20)) d'un modèle de la forme  $\dot{x} = f(x, u)$ , nous calculons :

$$\dot{\tilde{x}} = A(x_r) \tilde{x} + B(x_r) \tilde{u} + O(\tilde{x}, \tilde{u}).$$

$$\text{avec } \tilde{x} = x - x_r, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{(x_r, u_r)} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{pmatrix}_{(x_r, u_r)} \quad (2.21)$$

### 5.1.1. Choix des points de linéarisation

On calcule le linéarisé pour plusieurs positions d'inclinaison de la caisse, pour lesquelles le véhicule est en *équilibre dynamique*. Considérant une route plate (dévers  $\eta = 0$ ), on distingue deux cas :

- I. Pour  $\theta = 0$ , le mouvement est supposé rectiligne et l'on a :

$$x_{ref}^T = (y_r, \dot{y}_r, \psi_r, \dot{\psi}_r; \theta_r, \dot{\theta}_r) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

- II. Pour un angle d'inclinaison bien déterminé  $\theta \neq 0$ , le mouvement de la voiture est supposé circulaire uniforme sans glissements et l'on a :

$$x_{ref}^T = (y_r, \dot{y}_r, \psi_r, \dot{\psi}_r; \theta_r, \dot{\theta}_r) = (y_r, 0, \psi_r, (g \tan(\theta_r)) / V_x, \theta_r, 0).$$

Justification du second point d'équilibre :

- $y_r$  et  $\dot{y}_r$  : Le mouvement étant supposé sans glissements alors  $\dot{y}_r = 0$  et  $y_r$  à une valeur constante.

Conséquences : Lorsque le mouvement est sans glissements *i.e.*  $\dot{y} = \ddot{y} = 0$ , le véhicule décrit un cercle de rayon  $y$ , et de vitesse angulaire  $\dot{\psi}$ . L'accélération normale/latérale se réduit à  $a_y = -y\dot{\psi}^2 = -V\dot{\psi}$ , (cf.

- $\theta_r$  et  $\dot{\theta}_r$  :  $\theta_r$  est l'angle retenu pour la linéarisation, et comme nous choisissons une configuration où le véhicule est en équilibre sur une trajectoire circulaire,  $\theta_r$  est constante et  $\dot{\theta}_r = 0$ . Conséquence :  $\ddot{\theta}_r = 0$ .

- $\underline{\psi_r}$  et  $\dot{\psi_r}$  :  $\psi_r$  varie avec la position et la vitesse du véhicule sur sa trajectoire circulaire ; sa valeur précise ne nous intéresse pas pour l'instant ;  $\dot{\psi_r}$  est calculée en se basant sur le fait que le véhicule est stable en virage. Anticipant sur la démonstration du Chapitre 33.2, nous utilisons la relation exprimant la condition de stabilité et liant  $\theta = \theta_{ref}$  et  $\dot{\psi}$  lorsque  $\ddot{y} = 0$  et  $\ddot{\theta} = 0$  et  $\eta = 0$ .

$$\theta_{ref} = \arctan\left(\frac{V_x \dot{\psi}}{g}\right)$$

Nous déduisons alors la valeur de  $\dot{\psi_r}$  lorsque le véhicule est en position d'équilibre (donc  $\theta_r = \theta_{ref}$ ) :

$$\dot{\psi_r} = \frac{g}{V_x} \tan \theta_{ref}$$

### 5.1.2. Modèle obtenu

Nous reportons ici le linéarisé autour de  $\theta = 0$  uniquement, l'autre modèle étant nettement plus compliqué, les termes en fonction de  $\theta$ ,  $\sin \theta$  et  $\cos \theta$  n'étant pas simplifié lors du calcul des dérivé  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  est reporté en annexe 1.

Le modèle obtenu de la forme décrite par l'équation (2.20) est réduit à sa partie commandable et observable qui comporte 4 états ( $\dot{y}, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\eta}$ ) :

$$\begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\eta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} (-\frac{a}{mV_x} - \frac{h^2 a}{I_x V_x}) & (-\frac{b}{mV_x} - V_x - \frac{h^2 b}{I_x V_x}) & 2(\lambda_f + \lambda_r)(\frac{1}{m} + \frac{h^2}{I_x}) - \frac{mgh^2}{I_x} & 0 \\ (-\frac{b}{I_z V_x}) & \frac{2(C_f l_f^2 + C_r l_r^2)}{I_z V_x} & \frac{2(\lambda_f l_f - \lambda_r l_r)}{I_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{ha}{I_x V_x} & \frac{hb}{I_x V_x} & \frac{mgh - 2h(\lambda_f + \lambda_r)}{I_x} & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\psi} \\ \theta \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2C_f(\frac{1}{m} + \frac{h^2}{I_x}) \\ \frac{2C_f l_f}{I_z} \\ 0 \\ -\frac{2C_f h}{I_x} \end{bmatrix}}_{B_\delta} \delta + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{h}{I_x} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I_x} \end{bmatrix}}_{B_{M_t}} M_t + \underbrace{\begin{bmatrix} g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_\eta} \eta \quad (2.22)$$

$a = 2(C_f + C_r), b = 2(C_f l_f - C_r l_r), c = 2(\lambda_f + \lambda_r), B = [B_\delta \quad B_{M_t}].$

### 5.2. Etude du modèle Linéarisé

Dans ce paragraphe, nous étudions les limites de la validité du modèle linéarisé. Nous résumons dans un premier temps les hypothèses simplificatrices qui ont conduit à l'obtention de ce modèle, et nous analysons ensuite la validité du modèle vis-à-vis des hypothèses les plus impactantes, à noter l'angle d'inclinaison non nul et la vitesse longitudinale non constante.

### 5.2.1. Hypothèses simplificatrices

Les hypothèses simplificatrices majeures qui ont conduit à l'obtention de ce modèle bicycle qui servira de support à la synthèse de lois de commande sont listées ci-dessous :

1. on ne prend en compte que 3 DDL, la position latérale  $y$ , les angles de roulis et de lacet  $\theta, \psi$ ,
2. la vitesse longitudinale  $V_x$  est considérée comme un signal exogène et non pas une variable d'état du système. Il est résulte que le modèle (2.22) est LPV,  $V_x$  étant un paramètre variant.
3. la linéarisation est obtenue autour de l'angle d'inclinaison  $\theta = 0$ ,
4. les forces verticales sur les roues gauches et droites sont supposées égales,
5. la surface de la base du véhicule qui permet au véhicule de tolérer de petites valeurs d'accélération latérale sans se déstabiliser n'est pas prise en compte,
6. l'expression de  $F_{yf} = 2C_f(\delta - \frac{\ddot{y} + l_f \ddot{\psi}}{V_x}) - 2\lambda_f \theta$  est approximée aux petits angles ( $\tan \frac{\ddot{y} + l_f \ddot{\psi}}{V_x} \approx \frac{\ddot{y} + l_f \ddot{\psi}}{V_x}$ ), aussi, on considère la vitesse latérale égale au niveau des deux roues avants (respectivement arrières), puisque la largeur du véhicule n'est pas prise en compte.
7. la raideur (coefficient de glissement)  $C_f$  et le coefficient de carrossage  $\lambda_f$  sont supposés constants. Ce n'est pas le cas en phases transitoires, et leurs valeurs dépendent du modèle de la roue, des conditions de circulation ainsi que d'autres facteurs.
8. Les effets de la chasse et du carrossage au niveau des roues sont négligés,
9. les moments gyroscopiques des roues sont négligés,
10. l'effet des suspensions est négligé
11. On considère que les roues et le châssis s'inclinent d'un même angle  $\theta$ , de plus le point de contact des roues ne change pas de position lors de l'inclinaison,
12. les différentes pièces mécaniques en mouvement au sein du véhicule, suspensions, liens entre différentes pièces mécaniques ne sont pas modélisés,
13. la colonne de direction n'est pas modélisée, c.-à-d. on considère l'angle volant égal à l'angle de braquage  $\delta$ ,
14. le véhicule est assimilé à une masse localisée au centre de gravité qui bouge avec le point de contact ; on néglige le transfert de masse latéral et longitudinal.

Les hypothèses 2 et 3 exprimées ci-dessus peuvent être considérées parmi les plus restrictives par rapport à l'évolution de la dynamique du véhicule. Afin d'analyser les limitations du modèle par rapport à ces hypothèses, nous avons tracé la carte des pôles et étudié les diagrammes de bode des transferts des entrées et sorties pour différents modèles linéarisés obtenus selon les différentes valeurs de  $V_x$  et de  $\theta$ .

En première partie nous considérons la vitesse constante, et nous varions l'angle d'inclinaison.

### 5.2.2. Evolution des pôles en fonction de la variation de l'angle d'inclinaison $\theta$ à $V=10\text{m/s}$

Nous commencerons par présenter les résultats obtenus pour  $\theta=0^\circ$  et  $\theta=25^\circ$ , avant de présenter une cartographie des pôles pour l'ensemble de la plage de valeurs de  $\theta$  admissible.

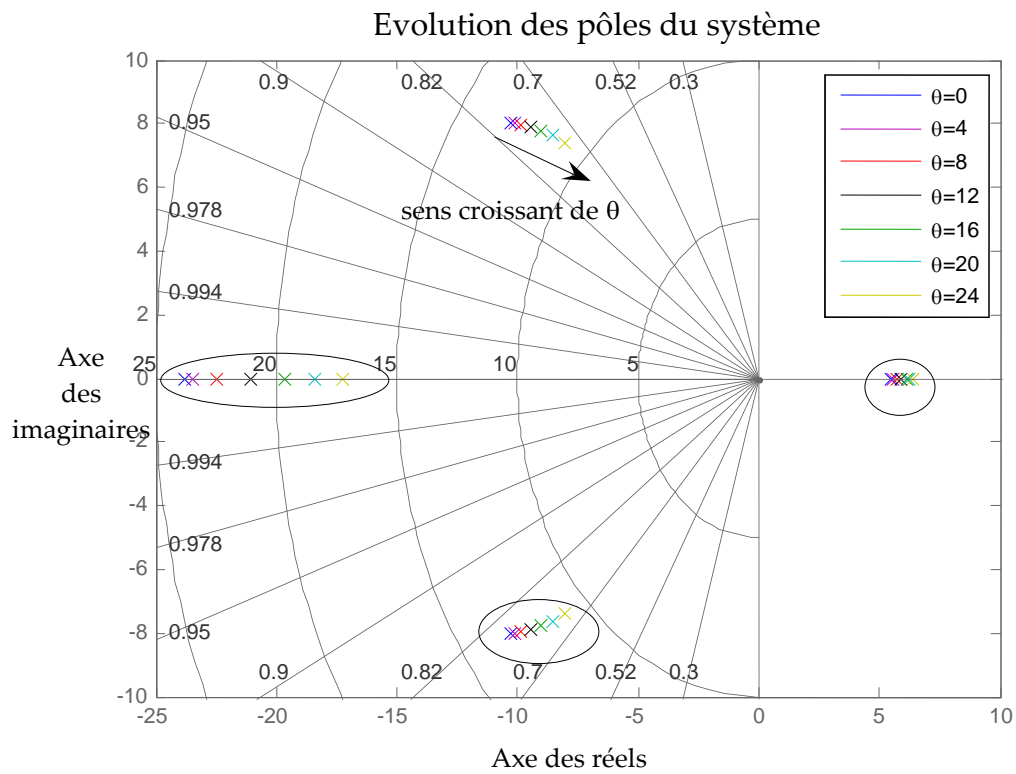
Les **valeurs propres** de la matrice A pour  $x_{ref}^T = (\dot{y}_r, \dot{\psi}_r; \theta_r, \dot{\theta}_r) = (0,0,0,0)$  sont :

$$eig(A) = \begin{pmatrix} 5.5130 \\ -23.7951 \\ -10.2452 + 8.0399i \\ -10.2452 - 8.0399i \end{pmatrix}$$

Et pour  $x_r^T = (\dot{y}_r, \dot{\psi}_r; \theta_r, \dot{\theta}_r) = (0, (g \tan(\theta_r)) / V, \theta_r, 0)$  avec  $\theta_r = 25^\circ$  :

$$eig(A) = \begin{pmatrix} 6.2661 \\ -8.5063 + 7.6137i \\ -8.5063 - 7.6137i \\ -18.3855 \end{pmatrix}$$

La Figure 2. 11 illustre la cartes des pôles du système pour différentes valeurs angulaires dans l'intervalle  $\theta \in [0^\circ; 25^\circ]$ . On notera qu'une carte identique aurait été obtenue pour un angle  $\theta < 0$  (et  $\dot{\psi}$  de signe opposé), puisque le véhicule est symétrique longitudinalement.



**Figure 2. 11 : Carte des pôles du système, évolution avec le changement de l'angle d'inclinaison  $\theta$**

### 5.2.3. Evolution des pôles en fonction de la variation de la vitesse $V_x$ avec $\theta=0$

La carte des pôles de la Figure 2. 12 décrit quant à elle l'évolution des pôles en fonction de la vitesse  $V_x$ . Notons que dans ce cas seule la matrice  $A$  dépend de la vitesse longitudinale.

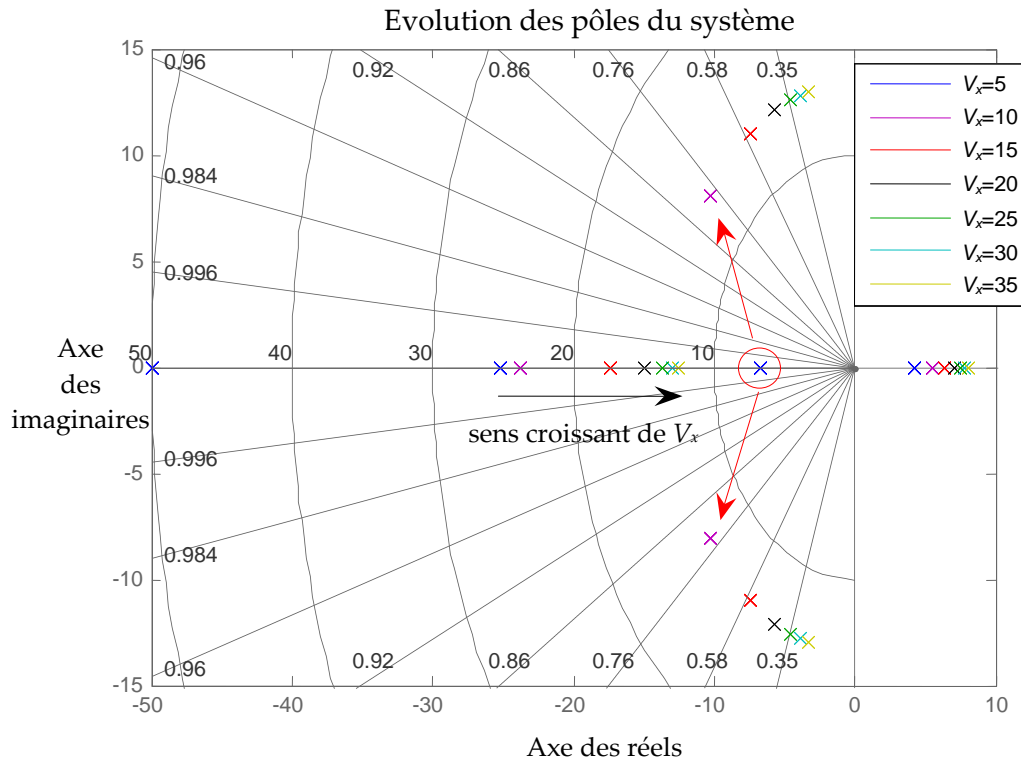
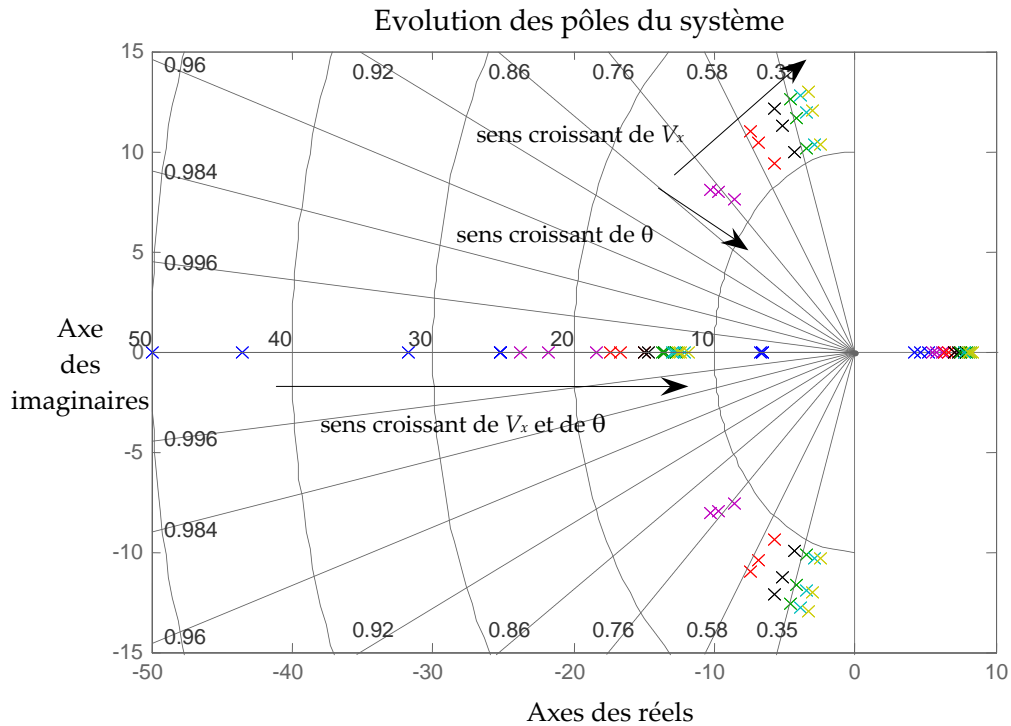


Figure 2. 12 : Carte des pôles du système, évolution avec le changement de la vitesse  $V_x$  (m/s).

#### 5.2.4. Observation de la variation des pôles lorsque $V_x$ et $\theta$ varient simultanément

Enfin si nous faisons varier simultanément la vitesse  $5 < V_x < 35 \text{ m/s}$  et de l'angle d'inclinaison  $0 < \theta < 20^\circ$ , les pôles du modèle linéarisés varient comme représenté la Figure 2. 13.





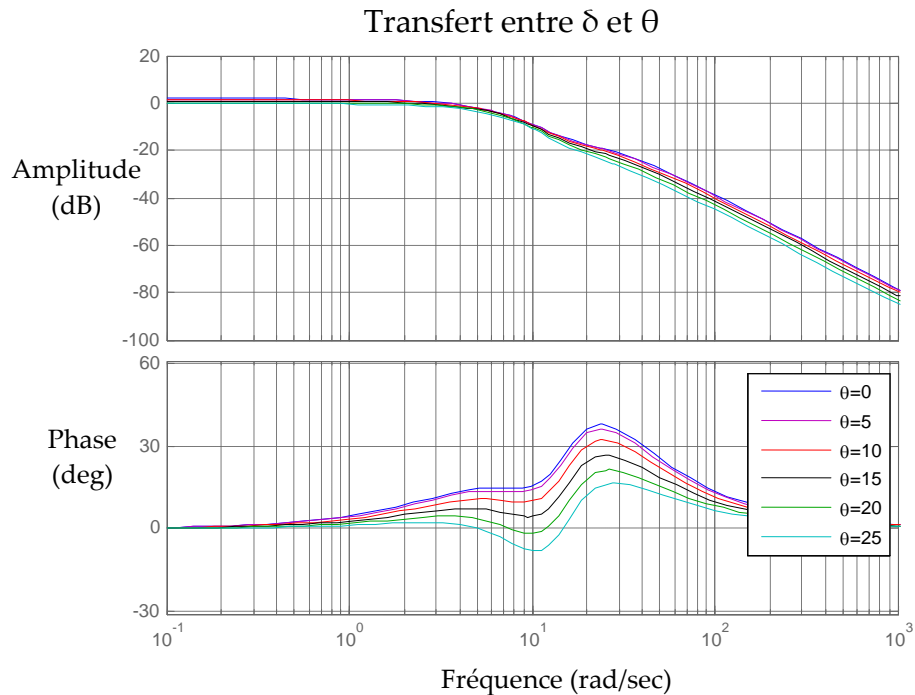
**Figure 2. 13 : Carte des pôles du système, évolution avec le changement de  $V$  et  $\theta$  simultanément**

Les cartes reportées ci-dessus montrent que la variation de  $\theta$  n'affecte que faiblement l'emplacement des pôles. La paire de pôles complexes garde pratiquement le même amortissement et la pulsation propre  $\omega_0$  varie peu  $10 \text{ rad.s}^{-1} < \omega_0 < 13 \text{ rad.s}^{-1}$ . Le pôle instable reste insensiblement autour de 5. La plus forte variation apparaît sur le pôle réel stable (le moins problématique) partant de -23 pour aller vers -18 lorsque  $\theta$  augmente.

En revanche, la variation de  $V_x$  influe plus fortement sur l'emplacement des pôles. On peut observer tout d'abord la plus forte variation du pôle réel stable. Concernant les pôles conjugués, ils gardent pratiquement la même pulsation naturelle mais leur amortissement varie significativement, passant d'un comportement non oscillatoire aux vitesses réduites à un comportement faiblement amorti ( $\xi = 0.2$ ) pour une vitesse de 35m /s (126 km/h).

Pour avoir une idée encore plus claire de ces variations, nous reportons ci-dessous les tracés de Bode des transferts entre les 2 entrées (braquage  $\delta$  et couple moteur  $M_i$ ) et la sortie  $\theta = \theta_{ref}$  lorsque  $\theta \in [0; 25]^\circ$  et  $V_x \in [0; 35] \text{ m/s}$  :

- Sensibilité aux variations de  $\theta \in [0; 25]^\circ$



**figure 2. 14 : Transfert entre  $\delta$  et  $\theta$ , pour  $V_x = 10 \text{ m/s}$**

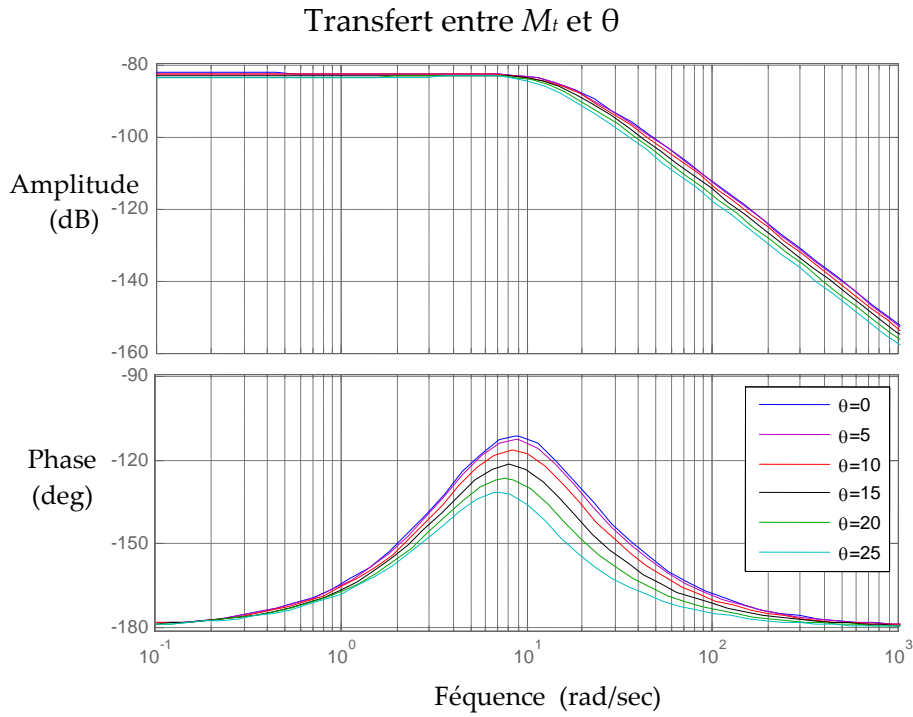


Figure 2. 15 : Transfert entre  $M_t$  et  $\theta$  , pour  $V_x = 10m / s$

- Sensibilité aux variations de la vitesse longitudinale  $V_x \in [0;35]m / s$

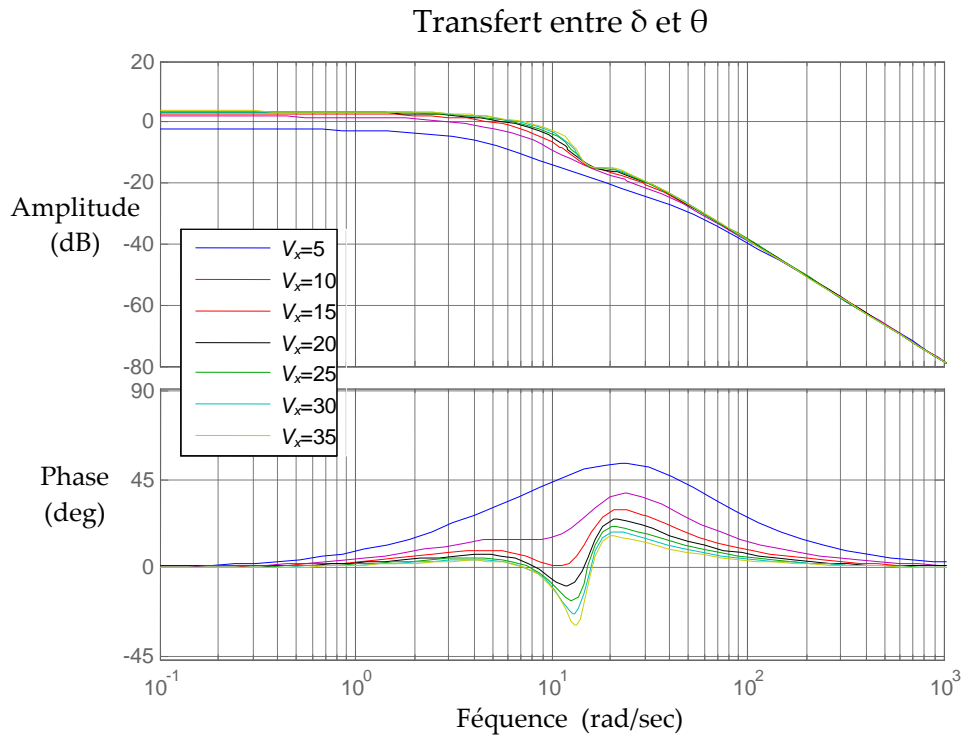
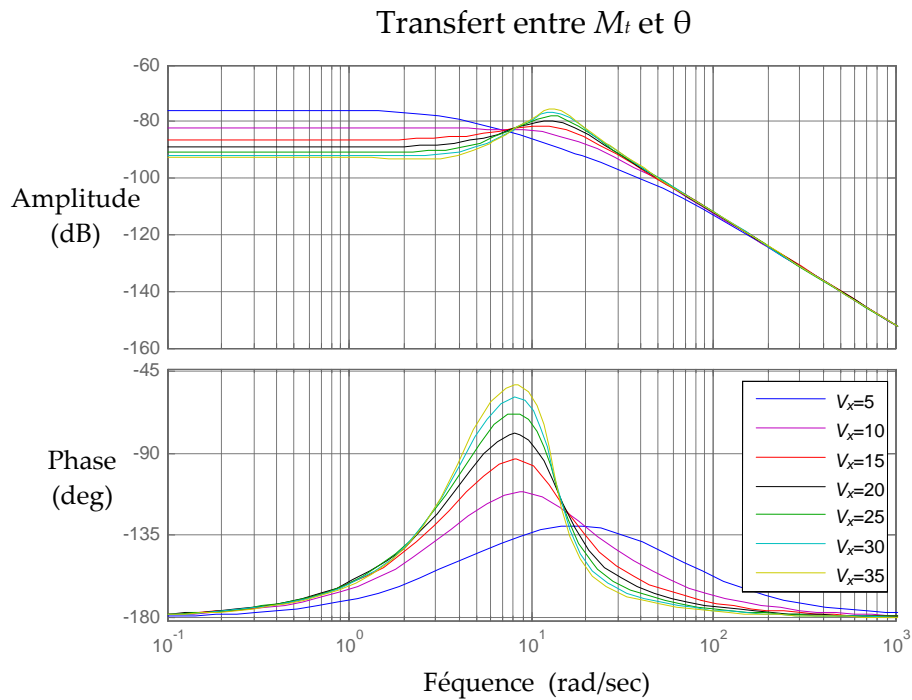


Figure 2. 16 : Variation du transfert entre  $\delta$  et  $\theta$  pour une variation de  $V_x$



**Figure 2. 17 : Variation du transfert entre  $M_t$  et  $\theta$  , pour une variation de  $V_x$**

Les variations des modules des transferts entre les entrées et tous les états sont calculés, et les résultats sont résumés dans les 2 tableaux suivant (BF : Basse Fréquence, HF : Haute Fréquence) :

	$\delta$ (angle de braquage)	$M_t$ (couple d'inclinaison)
$y$	Variation entre 13 et 17 dB en BF et la différence persiste en HF	Variation entre -155 et -160 dB en HF
$\dot{y}$	Variation entre 10 et 15 dB en BF et la différence persiste en HF	Variation entre -95 et -102 dB en HF
$\psi$	Pas de variations remarquables	Pas de variations remarquables
$\dot{\psi}$	Variation entre 2 et 5 dB en BF	Variation entre -150 et -160 dB en HF
$\theta$	Variation entre -75 et -83 dB en HF	Variation entre -155 et -160 dB en HF
$\dot{\theta}$	Variation entre -20 et -23 dB en HF	Variation entre -95 et -100 dB en HF

**Tableau 2. 1 : Effets de la variation de l'angle d'inclinaison  $\theta$  sur les différents transferts**

	$\delta$ (angle de braquage)	$M_r$ (couple d'inclinaison)
$y$	Variation entre 5 et 20 dB en BF	Variation entre -40 et -50 dB en BF
$\dot{y}$	Variation entre 9 et 28 dB en BF	Variation entre -50 et -75 dB en BF
$\psi$	Variation entre 40 et 45 dB en BF	Variation entre 9 et 28 dB en BF et la différence persiste en HF
$\dot{\psi}$	Variation entre -8 et 4 dB en BF	Variation entre -65 et -75 dB en BF
$\theta$	Pas de variations remarquables	Variation entre -80 et -90 dB en BF
$\dot{\theta}$	Pas de variations remarquables	Variation entre -95 et -110 dB en BF

Tableau 2. 2 : Effets de variation de la vitesse  $V_x$  sur les différents transferts.

#### 5.2.5. Analyse des résultats

On note que la variation de  $V_x$  affecte davantage l'amplitude des transferts que la variation de  $\theta$ , surtout aux basses fréquences. En effet les variations de module entraînées par la variation de la valeur de  $\theta$  lors de la linéarisation sont entre 5 et 10 dB, alors que les variations de module apportées par la variation de vitesse varient entre 5 et 15 dB et en BF, surtout pour le transfert entre  $\delta$  et  $\dot{\psi}$ , où l'on passe de 4dB à -8dB en BF.

Les modèles de validation, de compréhension et de synthèse ont été présentés ci-dessus. Nous nous intéressons maintenant aux applications, et passons en revue différentes versions de modèles ayant servi différents travaux sur la stabilisation latérale des véhicules.

## 6. Retour sur les modèles de synthèse utilisés en littérature

L'étude et le développement des véhicules étroits n'ont commencé que récemment, suite aux problèmes contemporains de congestion du trafic routier et de l'augmentation de la pollution. La problématique des véhicules étroits et inclinables est donc récente, et peu d'équipes de recherche (académiques ou industrielles) ont travaillé sur ce sujet. Nous passerons en revue dans cette section, les **modèles de VEI** conçus et utilisés dans ces travaux, en explicitant leurs avantages et limitations.

Les chercheurs de l'université California aux Etats-Unis furent parmi les premiers à s'intéresser aux VEI. Dans (Hibbard R. et al. 1996) et (So S. et al. 1997a), les auteurs considèrent

uniquement la dynamique de l'angle d'inclinaison  $\theta$  (modélisation monovariable), et le modèle utilisé pour la simulation est réduit à la fonction de transfert entre l'entrée  $M_l$  et  $\theta$ . Un modèle de simulation plus détaillé linéarisé aux petits angles, avec la dynamique longitudinale, est utilisé dans les travaux postérieurs (So S. et al. 1997b).

Aux Etats Unis, à l'**université de Minneapolis** dans le Minnesota, un prototype de véhicule inclinable a été construit, et plusieurs avancées ont été réalisées. Dans (R. Rajamani et al. 2003) les auteurs ne s'intéressent qu'à la modélisation du véhicule. Ils négligent la dynamique longitudinale, mais prennent en compte les moments gyroscopiques des roues et le moment de chasse, ce qui correspond au modèle de l'équation (2.15), aux forces de rappel près qui sont omises, ( $F_s = 0$ ). Par contre, dans leur travaux concernant la commande des VIE, leur modèle de **synthèse** pour la conception de la loi de commande, utilisé aussi pour la **simulation**, est le modèle plus simplifié et linéarisé de l'équation (2.22), modèle que l'on retrouve dans la plupart de leurs publications : (Piyabongkran D. et al. 2004; Kidane S. et al. 2006; Kidane S. et al. 2008; Kidane S. et al. 2010).

Au Royaume Uni, à l'**université de Bath**, les chercheurs ont travaillé sur le projet du véhicule 'Clever'. Récemment, J. Berote a présenté ses travaux de thèse (J. Berote 2010) dédiés à la modélisation et à l'identification du modèle du véhicule. Un modèle multi-corps à 5ddl qui inclut les dynamiques des actionneurs hydrauliques est proposé, et est ensuite incorporé dans le logiciel SimMechanics, pour obtenir un modèle de **validation**, utilisé dans les travaux plus récents de (Roberston J. et al. 2012). Par contre, Le contrôleur utilisé est un PID, ou un simple P dans (J. Berote et al. 2008), qui ne nécessitent pas de modèles. Par contre les auteurs considèrent des relations approximatives entre l'angle de braquage et l'accélération latérale d'une part, et l'angle de braquage et l'angle d'inclinaison d'autre part pour synthétiser leurs références.

Au Brésil, à l'**université Fédérale de Santa Catarina**, des chercheurs ont modélisé leur prototype muni d'un système STC par un modèle à quatre corps et six DDL, en utilisant la formulation Lagrangienne. Les DDL correspondent aux translations et rotations selon les 3 axes du véhicule. Ce modèle est utilisé à des fins de validation par simulation. Le modèle de **synthèse** quant-à lui, se restreint à la dynamique d'inclinaison  $\ddot{\theta} = g \sin \theta + v \dot{\psi} \cos \theta$ , couplé à la dynamique longitudinale  $m\dot{v} = F_l - K_{drag} v^2$  où  $K_{drag}$  est une constante exprimant le coefficient de frottement avec l'air (Roquero et al. 2011; Roquero, Enric, et al. 2010; Roquero, Rodrigo, et al. 2010).

A Taiwan, à l'**université nationale de Chiao Tung**, avec le support du 'Industrial Technology Research Institute', les chercheurs ont travaillé sur la modélisation de leur prototype de VEI à quatre roues, qui se démarque des VEI classiques par la disposition de ses roues et un braquage pouvant aller jusqu'à 90° permettant le mouvement circulaire du véhicule autour son centre de gravité (Chiou et al. 2008). Le modèle de **simulation** est obtenu à l'aide de la formulation de Lagrange, et comprend 11 corps comprenant les roues avant/droite/ gauche/

arrière, leur système de liaison avec le châssis, le châssis, la fourche avant, le conducteur et son environnement. Par contre, pour la synthèse de la commande, une technique de réglage empirique d'un PID ne nécessitant pas de modèle de synthèse a été choisi (Chiou et al. 2009).

Sans doute pour des raisons de confidentialité, notre recherche bibliographique ne nous a pas permis d'obtenir de publications relatives aux modèles ou aux stratégies de commandes utilisés pour l'élaboration des VEI cités au chapitre 1.

## **7. Conclusion**

Dans ce chapitre dédié aux modèles de VEI, un aperçu du modèle relativement fin développé à l'IRCCyN pour le véhicule Smera de Lumeneo a d'abord été rappelé. Ceci permet d'apprécier le saut de complexité qui peut exister entre les modèles considérés dans ce mémoire et utilisés pour la synthèse du contrôleur et un modèle un tant soit peu sophistiqué.

Nous nous sommes ensuite intéressés à l'élaboration d'un modèle à 5DDL, comportant dynamiques longitudinales et latérales, particulièrement utile pour comprendre la problématique générique de la stabilité des véhicules inclinables. Etant d'abord intéressé par les dynamiques latérales, un modèle à 3DDL a été obtenu par simplification des dynamiques longitudinales. Un modèle encore davantage simplifié mais potentiellement utile pour la conception de stratégies de commande, a été obtenu par linéarisation. Les hypothèses simplificatrices utilisées pour l'obtention de ce dernier modèle ont été mentionnées, et la qualité de représentation du modèle linéaire analysé. Finalement, les modèles de simulation et synthèse utilisés dans la littérature ont été présentés ou cités.

Ce chapitre a donc permis de faire ressortir les dynamiques principales à prendre en compte pour l'étude du comportement latéral des VEI. Le chapitre 3 à venir présente quant à lui la problématique de la stabilité latérale, et les moyens d'action possibles pour la stabilisation.

## Chapitre 3 Commande des véhicules inclinables : formalisation du problème et états de l'art des stratégies de commande

---

Les VEI sont une solution partielle aux problèmes de trafic routier, de consommation d'énergie et de pollution. En revanche, ces véhicules sont moins stables de par leur fort ratio entre hauteur et largeur. Lors de la prise d'un virage, l'accélération du véhicule due au mouvement curviligne se décompose en accélérations tangentielle (orthoradiale) et normale (radiale ou latérale). L'accélération tangentielle dans le sens de l'axe longitudinal du véhicule induit une variation de la vitesse longitudinale, tandis que l'accélération normale (dite latérale), perpendiculaire à l'axe longitudinal, permet au véhicule de prendre les virages. D'autre part, cette accélération latérale, crée un moment au centre de gravité du véhicule qui, au dessus d'un certain seuil tend à renverser le véhicule ou l'écarter de la trajectoire souhaitée. L'accélération latérale est aussi mal perçue par le conducteur. Pour remédier à cette problématique, les chercheurs et industriels se sont inspirés de la dynamique des véhicules deux roues (motocycles, bicyclettes...), *i.e.* de leur inclinaison en virage, pour stabiliser les VEI.

Dans ce chapitre, après avoir défini la problématique de stabilité latérale et du confort des passagers, nous définissons en première partie l'accélération latérale, ses origines et son expression. Nous précisons ensuite les conditions de stabilité et confort des passagers dans le contexte de l'étude de la résultante des accélérations au centre de gravité du véhicule et dans le contexte de l'étude des forces de réaction au niveau du contact des roues gauche et droite avec le sol. Nous choisirons le contexte le plus adapté et nous nous intéressons ensuite aux moyens d'action possibles, systèmes DTC, STC ou SDTC couplant les deux moyens d'action. Après avoir établi un état de l'art des stratégies utilisées, nous formaliserons la stratégie de commande proposée.

### 1. Conditions de stabilité et confort des passagers

Un véhicule est en équilibre latéralement tant qu'il suit sa trajectoire curviligne sans glisser hors de la trajectoire (**limite d'adhérence des pneus**) et sans se renverser suite au moment créé par l'accélération latérale (**limite de renversement**). D'après l'étude faite par (Garrott et al.

1988), les véhicules considérés comme étroits sont ceux dont le ratio hauteur sur largeur est supérieur à 0.6. Face à l'accélération latérale  $a_{lat}$ , ces VEI atteignent la **limite de renversement** avant d'atteindre la **limite de perte d'adhérence**, pour une accélération maximale en moyenne de  $a_{lat-max} < 0.7m/s^2$ , tandis que les véhicules classiques ont une limite de renversement bien supérieure et atteignent la limite d'adhérence pour  $0.6m/s^2 < a_{lat} < 0.8m/s^2$ . Nous nous intéressons donc ici à la **limite de renversement** de ces véhicules et calculerons l'accélération latérale maximale  $a_{lat-max}$  tolérée sans renversement lorsque le véhicule se tient à la verticale, mais aussi lorsqu'il est en inclinaison.

Hormis la question principale de la stabilité, nous nous intéressons au ressenti du conducteur. En fait, l'accélération latérale est source d'inconfort pour les passagers ; le record d'accélération qu'a pu supporter le corps humain est de  $46m/s^2$  pour quelques *millièmes* de seconde (expérimenté par le colonel de l'US Air Force John Stapp, qui a souffert toute sa vie de troubles de la vision résultant de cette expérience). De façon durable, la limite est généralement de  $2m/s^2$  d'après les chiffres publiés par la Nasa. Cependant, en conduite automobile (hors compétition et rallye), l'accélération latérale *perçue* garantissant un certain confort de conduite est de  $1m/s^2$  seulement. Ainsi, en parallèle avec l'objectif de stabilité latérale et de non renversement du véhicule, nous veillerons à ce que la conduite des VEI induise une accélération latérale *perçue* inférieure à  $1m/s^2$ .

La **limite de renversement** du véhicule due à l'accélération latérale peut être estimée de deux façons différentes :

- en observant les **accélérations agissant au centre de gravité** dans le plan perpendiculaire à l'axe du véhicule, dont la résultante se dénomme  $a_{per}$ , ou accélération latérale perçue,
- ou bien en étudiant le **transfert de charge** et les forces de réaction au niveau des contacts roues/sol.

Ces deux points sont traités ci dessous. Nous expliquerons en préambule les origines de l'accélération latérale, et définirons son expression générale et celle déduite du modèle du véhicule.



## 2. Calcul de l'accélération latérale

### 2.1. Remarque préliminaire concernant la mécanique du point

Pour situer le problème de stabilisation latérale d'un véhicule et faire le lien avec les lois classiques de la mécanique, rappelons pour commencer de manière générale les forces et accélérations subies par une masse ponctuelle  $M$  en mouvement. Les notations utilisées ci-dessous, associées classiquement à la mécanique du point, diffèrent de celles que nous avons retenues pour le modèle du véhicule à partir de la section 2.2.

Supposons les coordonnées de position de la masse  $M$  en mouvement décrites dans un repère de coordonnées cylindriques  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  :  $\vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$ .

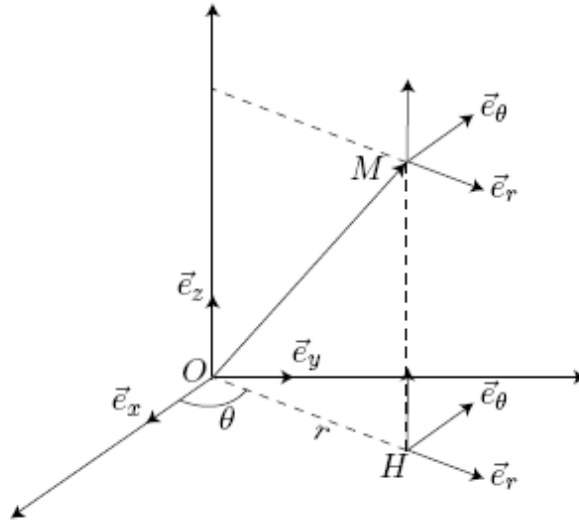


Figure 3. 1 : Masse  $M$  dans un repère de coordonnées cylindriques

Remarque :  $r, \theta, z, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta$  varient lorsque la masse  $M$  se déplace, et dépendent donc du temps

selon :  $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta, \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r, \quad \frac{d\vec{e}_z}{dt} = 0$

La vitesse du point  $M$  s'écrit :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \dot{z}\vec{e}_z = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$$

Et son accélération:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + (r\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} + \ddot{z}\vec{e}_z \\ \vec{a} &= \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)}_{a_N}\vec{e}_r + \underbrace{(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})}_{a_r}\vec{e}_\theta + \underbrace{\ddot{z}}_{a_z}\vec{e}_z \end{aligned}$$

$$\text{Avec } a_N = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2), \quad a_T = (2r\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}), \quad a_z = \ddot{z}e_z \quad (3.1)$$

Du point de vue stabilité latérale, nous nous intéressons à étudier l'effet de la composante normale  $a_N = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$  sur la dynamique du véhicule qui, compte tenu de ces notations, est fonction du glissement latéral  $\ddot{r}$ , de la vitesse selon  $e_\theta$ ,  $r\dot{\theta}$ , et de la vitesse de lacet  $\dot{\theta}$ . Cette composante sera nommée accélération latérale ou  $a_{lat}$  d'où la définition suivante :

On dénommera par **accélération latérale**  $a_{lat}$ , l'accélération normale  $a_N$  induite par le mouvement curviligne du véhicule, calculée/mesurée dans le plan  $(XY)$  au niveau du sol au point D (Figure 3. 2), et dirigée vers le centre de rotation de la trajectoire.  $a_{lat}$  est fonction de la vitesse de lacet (et donc de l'angle de braquage) et de la vitesse longitudinale imposées par le conducteur. Elle est indépendante de la position verticale (angle d'inclinaison) du châssis (Figure 3. 2).

En utilisant les résultats de (3.1), avec les correspondances  $r = y$  et  $\theta = \psi$ , nous obtenons l'expression de  $a_{lat} = \ddot{y} + V_x \dot{\psi}$ . Cette expression peut être retrouvée à partir du modèle du véhicule d'où la *proposition 3.1* ci-dessous.

## 2.2. Accélération latérale du véhicule

**Proposition 3.1** : L'accélération latérale  $a_{lat} = a_y^D$  peut s'exprimer au travers des deux égalités équivalentes suivantes :

$$a_{lat} = \frac{1}{m} \underbrace{(F_{sr} + F_{lf} \sin \delta + F_{sf} \cos \delta)}_{R_y} - (h\ddot{\theta} \cos \theta - h\dot{\theta}^2 \sin \theta - g \sin \eta) \quad (3.2)$$

$$a_{lat} = \ddot{y} + V_x \dot{\psi} \quad (3.3)$$

Où l'équation (3.2) est déduite du modèle du véhicule (2.17), et l'équation (3.3) est celle utilisée par Rajamani et al. (Piyabongkran D. et al. 2004)

### **Démonstration :**

Partant du modèle du véhicule (2.9) que nous rappelons ci-dessous :

$$\begin{cases} \dot{v} = \frac{1}{m}(F_{sf} \sin(\beta - \delta) + F_{lf} \cos(\beta - \delta) + F_{sr} \sin \beta + F_{lr} \cos \beta) - (h\ddot{\theta} \cos \theta - h\dot{\theta}^2 \sin \theta - g \sin \eta) \sin \beta \\ \dot{\beta} = -r + \frac{1}{mv}(F_{sf} \cos(\beta - \delta) - F_{lf} \sin(\beta - \delta) - F_{sr} \cos \beta + F_{lr} \sin \beta) - \frac{1}{v}(h\ddot{\theta} \cos \theta - h\dot{\theta}^2 \sin \theta - g \sin \eta) \cos \beta \\ \ddot{\psi} = \dot{r} = \frac{l_f}{J}(F_{sf} \cos \delta + F_{lf} \sin \delta) - \frac{l_r}{J}F_{sr} \\ \ddot{\theta} = \frac{(hF_s \sin^2 \theta + mgh \sin \theta \cos \eta - mh\dot{\theta}^2 \cos \theta \sin \theta - (F_{sf} \cos \delta + F_{lf} \sin \delta + F_{sr})h \cos \theta + M_t)}{(I_x + mh^2 \sin^2 \theta)} \end{cases}$$

Le vecteur vitesse du point  $D$  (Figure 3. 2) dans le repère  $(x, y, z)$  s'écrit :

$$\begin{bmatrix} v_x^D \\ v_y^D \\ v_z^D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos \beta \\ v \sin \beta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

et se déduit dans le repère absolu  $(X, Y, Z)$  au travers de la relation :

$$\begin{bmatrix} v_X^D \\ v_Y^D \\ v_Z^D \end{bmatrix} = R^{-1} \begin{bmatrix} v_x^D \\ v_y^D \\ v_z^D \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Dans laquelle  $R$  est la matrice de passage du repère  $(x, y, z) \xrightarrow{R} (X, Y, Z)$ ,

$$R = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{et } \dot{R}^{-1} = \dot{\psi} \begin{bmatrix} -\sin \psi & -\cos \psi & 0 \\ \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A partir de ces données, nous calculons les accélérations :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_x^D \\ a_y^D \\ a_z^D \end{bmatrix} &= R \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_x^D \\ v_y^D \\ v_z^D \end{bmatrix} = R \frac{d}{dt} (R^{-1} \begin{bmatrix} v_x^D \\ v_y^D \\ v_z^D \end{bmatrix}) = RR^{-1} \begin{bmatrix} \dot{v}_x^D \\ \dot{v}_y^D \\ \dot{v}_z^D \end{bmatrix} + R\dot{R}^{-1} \begin{bmatrix} v_x^D \\ v_y^D \\ v_z^D \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_x^D \\ a_y^D \\ a_z^D \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{v}_x^D \\ \dot{v}_y^D \\ \dot{v}_z^D \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x^D \\ v_y^D \\ v_z^D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{v}_x^D \\ \dot{v}_y^D \\ \dot{v}_z^D \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -v_y^D \\ v_x^D \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{v} \cos \beta - v\dot{\beta} \sin \beta \\ \dot{v} \sin \beta + v\dot{\beta} \cos \beta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -v \sin \beta \\ v \cos \beta \\ 0 \end{bmatrix} r \end{aligned} \quad (3.6)$$

En remplaçant  $\dot{v}$  et  $\dot{\beta}$  par leur expression dans le modèle d'état (2.9)

$$\begin{bmatrix} a_x^D \\ a_y^D \\ a_z^D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m}(F_{lf} \cos \delta + F_{lr} - F_{sf} \sin \delta) + vr \sin \beta \\ \frac{1}{m}(F_{sr} + F_{lf} \sin \delta + F_{sf} \cos \delta) - vr \cos \beta - (h\ddot{\theta} \cos \theta - h\dot{\theta}^2 \sin \theta - g \sin \eta) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -v \sin \beta \\ v \cos \beta \\ 0 \end{bmatrix} r$$

$$\begin{bmatrix} a_x^D \\ a_y^D \\ a_z^D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m}(F_{lf} \cos \delta + F_{lr} - F_{sf} \sin \delta) \\ \frac{1}{m}(F_{sr} + F_{lf} \sin \delta + F_{sf} \cos \delta) - (h\ddot{\theta} \cos \theta - h\dot{\theta}^2 \sin \theta - g \sin \eta) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi nous retrouvons l'expression (3.2):

$$a_{lat} = a_y^D = \frac{1}{m} \underbrace{(F_{sr} + F_{lf} \sin \delta + F_{sf} \cos \delta)}_{R_y} - (h\ddot{\theta} \cos \theta - h\dot{\theta}^2 \sin \theta - g \sin \eta)$$

où  $R_y$  représente la projection de la somme des forces de contact roues/sol sur l'axe (y).

**Remarque** : en phase stationnaire, lorsque l'angle d'inclinaison est constant (*i.e.* le véhicule est à l'équilibre en trajectoire circulaire à vitesse constante,  $\theta = cst \neq 0$ ,  $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ ), l'accélération latérale est égale à l'accélération causée par les forces latérales :

$$a_{lat} = \frac{R_y}{m}$$

Finalement, pour exprimer  $a_{lat}$  en fonction des états du modèle latéral (2.18), à partir de l'équation (3.6), nous utilisons les égalités  $\dot{y} = v_y^D = v \sin \beta$  et  $V_x = v \cos \beta$  :

$$a_y^D = \dot{v}_y^D + vr \cos \beta = \underbrace{(v \sin \beta)}_{\dot{y}} + vr \cos \beta = \ddot{y} + V_x r = \ddot{y} + V_x \dot{\psi}$$

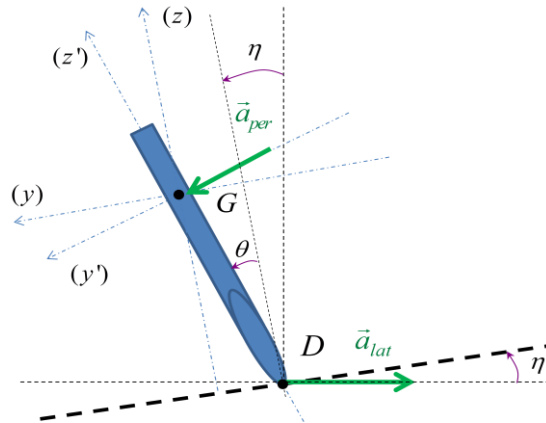


Figure 3. 2 : Vue arrière du véhicule ; accélération latérale et accélération perçue (en boucle ouverte)

Dans ce qui suit, nous présentons deux alternatives correspondant à deux philosophies différentes pour le contrôle de la stabilité latérale du véhicule : l'étude de la résultante des accélérations au centre de gravité du véhicule, et l'étude du transfert de charge.

### 3. Etude de l'accélération latérale perçue

#### 3.1. Définition et expression de $a_{per}$

On dénommera par **accélération (latérale) perçue**  $a_{per}$ , la résultante des accélérations au niveau du centre de gravité du véhicule selon l'axe perpendiculaire au châssis ( $y'$ ) (Figure 3.2). C'est la grandeur qui nous permettra d'assurer la mise à l'équilibre du véhicule.

Dans le repère ( $y'z'$ ), l'accélération au point  $G$  se décompose en  $a_{per}$  selon ( $y'$ ) et  $a_z$  selon ( $z'$ ). Or  $a_z$  sera compensée par la réaction du sol, reste à compenser  $a_{per}$ . Ce sera l'objectif de la commande pour la stabilisation latérale des véhicules et le confort du conducteur que d'imposer  $a_{per} = 0$ . Or  $a_{per}$  dépend de  $a_{lat}$  et de  $\theta$  :  $a_{lat}$  dépend de la trajectoire et de la vitesse longitudinale, et c'est l'angle d'inclinaison  $\theta$  qui sera la variable clé pour assurer la stabilité. On définira par  $\theta_n$  la position désirée de  $\theta$  qui assure  $a_{per} = 0$ .

d'où la condition suivante :

**Condition suffisante de stabilité latérale (1):**

Le véhicule est en équilibre latéral, si l'accélération latérale perçue est nulle, i.e.  $a_{per} = 0$

**Remarque :** C'est une condition suffisante mais pas nécessaire, puisque nous verrons dans les paragraphes 5 et 6, que compte tenu des dimensions du véhicule (largeur et hauteur), la stabilité peut être assurée pour une valeur de  $a_{per}$  non strictement nulle.

Explicitons à présent l'expression de l'accélération perçue en fonction des variables d'états et des entrées du système. Cette équation clé sera exploitée tout au long du manuscrit.

**Propositions 3.2 :** L'accélération perçue s'écrit

$$a_{per} = a_{lat} \cos \theta + h\ddot{\theta} - g \sin(\theta + \eta) \quad (3.7)$$

### Démonstration :

L'accélération perçue est la résultante des accélérations selon l'axe perpendiculaire au châssis ( $y'$ ) en  $G$ . En considérant les forces externes appliquées au véhicule, elle s'écrit:

$$ma_{per} = R_y \cos \theta - R_z \sin \theta \quad (3.8)$$

*Rappelons :* Dans le repère  $(r) = (x, y, z)$ ,  $R_y$  est la projection de la somme des forces de contact roues/sol avant et arrière sur l'axe ( $y$ ), et  $R_z$  la réaction du sol selon l'axe vertical ( $z$ ), calculées dans les équations (2.7) et (2.8) qui peuvent aussi s'écrire :

$$\begin{cases} R_y + mg \sin \eta = m\ddot{y}_G \\ R_z - mg \cos \eta = m\ddot{z}_G \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} y_G = y_D + h \sin \theta \\ z_G = h \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{y}_G = \ddot{y}_D + h\ddot{\theta} \cos \theta - h\dot{\theta}^2 \sin \theta \\ \ddot{z}_G = -h\ddot{\theta} \sin \theta - h\dot{\theta}^2 \cos \theta \end{cases}$$

avec les points  $G$  et  $D$  de coordonnées respectives  $(x_G, y_G, z_G)$  et  $(x_D, y_D, z_D)$ , (cf. Figure 3. 2), avec  $a_{lat}$  l'accélération du point  $D$ , alors :

$$\begin{cases} R_y = m(-g \sin \eta + a_{lat} + h\ddot{\theta} \cos \theta - h\dot{\theta}^2 \sin \theta) \\ R_z = mg \cos \eta - mh\ddot{\theta} \sin \theta - mh\dot{\theta}^2 \cos \theta \end{cases} ,$$

D'où :

$$\Rightarrow a_{per} = (-g \sin \eta + a_{lat} + h\ddot{\theta} \cos \theta - h\dot{\theta}^2 \sin \theta) \cos \theta - (g \cos \eta - h\ddot{\theta} \sin \theta - h\dot{\theta}^2 \cos \theta) \sin \theta$$

$$\Rightarrow a_{per} = a_{lat} \cos \theta + h\ddot{\theta} \cos^2 \theta - \cancel{h\dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta} - g \sin(\theta + \eta) + h\ddot{\theta} \sin^2 \theta + \cancel{h\dot{\theta}^2 \cos \theta \sin \theta}$$

$$\Rightarrow a_{per} = a_{lat} \cos \theta + h\ddot{\theta} - g \sin(\theta + \eta)$$

CQFD

### 3.2. Etude de la stabilité à partir de la résultante des accélérations au centre de gravité

Examinons, à partir de l'expression de  $a_{per}$ , la dynamique du véhicule dans trois cas distincts :

- 1- véhicule vertical en trajectoire rectiligne,
- 2- véhicule vertical en trajectoire circulaire (Figure 3. 3),
- 3- véhicule incliné en trajectoire circulaire.

### 3.2.1. Véhicule vertical en trajectoire rectiligne

Dans ce cas  $\theta=0$  et  $a_{lat}=0$ , donc  $a_{per}=0$  et le problème de stabilité latérale ne se pose pas, sauf pour les cas de rejet des forces latérales de perturbation (*i.e.* les coups de vents latéraux), de dévers de la route, ou des perturbations dues à une chaussée asymétrique au niveau des roues gauches et droites.

### 3.2.2. Véhicule vertical en trajectoire circulaire

Lorsque le véhicule ne s'incline pas (*i.e.*  $\theta=0$ ), alors  $a_{per}=a_{lat}$  (cf. équation (3.7)). La Figure 3.3 illustre tour à tour le cas où le véhicule est stable malgré une accélération latérale non nulle (Figure 3.3(2)), et le cas où il est instable (Figure 3.3(3)) et se renversera alors, puisque l'intersection  $x_g$  de la résultante des accélérations  $a_g$  au niveau de son centre de gravité  $G$  avec le plan du sol est en dehors de la base du véhicule.

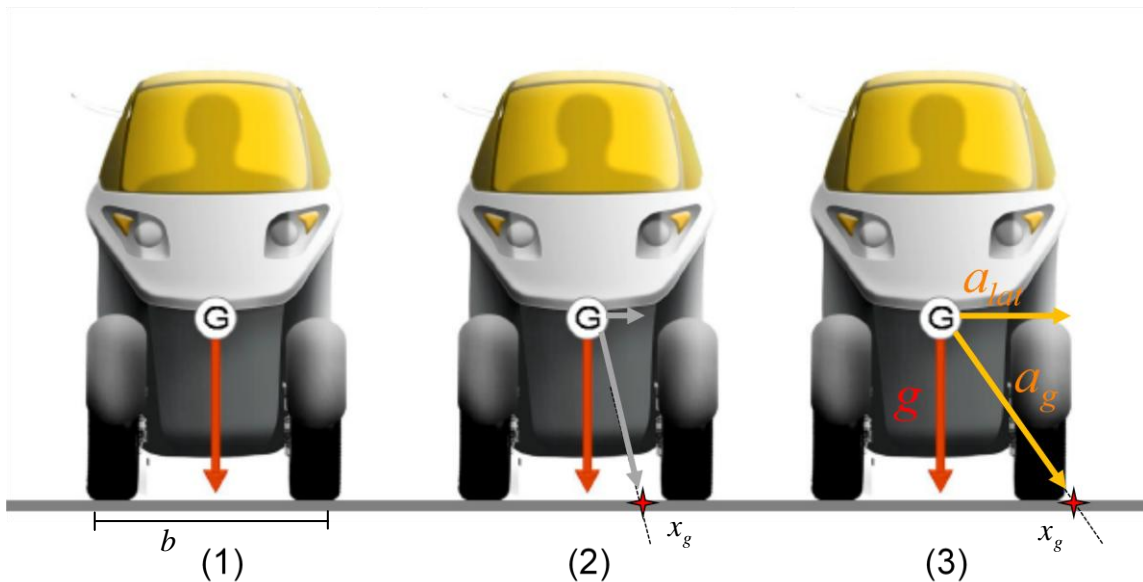


Figure 3.3 : Différentes valeurs de  $a_{lat}$  au cdg d'un VEI de largeur  $b$

Soit  $b$  la largeur du véhicule. Le véhicule ne se renverse pas tant que  $-\frac{b}{2h} < \frac{a_{lat}}{g} < \frac{b}{2h}$ . Ainsi :

L'accélération latérale **maximale** tolérée **sans inclinaison** avant le renversement est de :

$$a_{lat-max} = \pm \frac{gb}{2h} \quad (3.9)$$

Notons à partir de l'expression (3.9), que plus la valeur de  $h$  est importante, (ou celle de  $b$  petite), plus  $a_{lat-max}$  est petite, ce qui constitue la problématique des véhicules étroits, par comparaison aux véhicules quatre roues de dimensions classiques.

### 3.2.3. Véhicule incliné en trajectoire circulaire

Lorsque le véhicule s'incline d'un certain angle  $\theta$ , son centre de gravité est décalé, ainsi que le point  $x_g$ . Le véhicule est stable tant que  $x_g$  appartient au segment  $b$ , Figure 3. 4, donc est situé entre les deux roues du véhicule.

Soit  $\theta_n$  l'angle d'inclinaison nominal pour lequel toutes les accélérations en  $G$  sont compensées, donc qui est **solution de**  $a_{per} = 0$ , avec  $a_{per} = a_{lat} \cos \theta + h\ddot{\theta} - g \sin(\theta + \eta)$ . Le calcul de  $\theta_n$  s'avérant compliqué, on procède en considérant le régime permanent (i.e.  $\ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$ ) et un dévers nul,  $\eta = 0$  :  $a_{per} \approx a_{lat} \cos \theta - g \sin \theta = 0$ . On en déduit alors la proposition suivante:

**Proposition 3.3:** L'angle de référence assurant le non renversement en virage peut être déduit de l'estimation de l'inclinaison d'équilibre selon :

$$\theta_{ref} = \hat{\theta}_n = \tan^{-1}\left(\frac{a_{lat}}{g}\right) \quad (3.10)$$

Sur la Figure 3. 5 ceci se traduit par une résultante  $a_g$  de  $a_{lat}$  et  $g$  colinéaire avec l'axe ( $z'$ ) du véhicule, ou encore par des projections égales et de sens opposé selon l'axe ( $y'$ ) donc :

$$a_{lat} \cos \theta = g \sin \theta \quad (3.11)$$

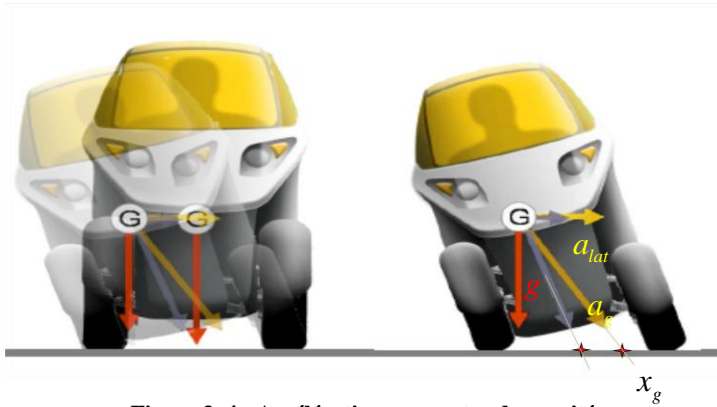


Figure 3. 4 : Accélérations au centre de gravité

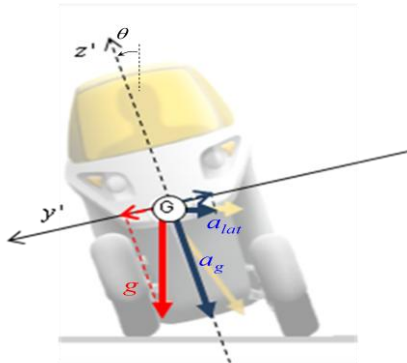


Figure 3. 5 : L'angle d'inclinaison  $\theta$  correspond à  $a_{per} = 0$  ;  $a_g$  est selon l'axe ( $z'$ ) et  $a_{lat} \cos \theta = g \sin \theta$  lorsque  $\eta = 0$



Ainsi, l'angle  $\theta = \theta_n$  solution de  $a_{per} = 0$  est un angle qui garantit la stabilité latérale du véhicule (non renversement). Précisément, la stabilité du véhicule est acquise pour  $\theta$  dans un intervalle  $\theta \in [\theta_n - \Delta\theta_{\min}; \theta_n + \Delta\theta_{\max}]$ , la largeur de l'intervalle étant une fonction de  $a_{lat}$  et des dimensions du véhicule, que l'on calculera au paragraphe 5.

## 4. Etude du transfert de charge

### 4.1. Définition du transfert de charge et calcul des forces de contact verticales roues/sol

Le transfert de charge représente la **variation des forces exercées sur les pneus** (ne pas confondre avec le transfert de masse qui est un déplacement du centre de gravité du véhicule). Le transfert de charge s'effectue durant les différentes manœuvres (freinage, virage, etc.) et est dû à des forces appliquées à la surface du pneu parallèlement au revêtement. Par exemple quand le véhicule prend un virage, il s'exerce sur les pneus (avant ( $f$ ), arrière ( $r$ ), gauche ( $le$ ) et droite ( $ri$ )) des forces latérales horizontales, perpendiculaires à la direction du véhicule ( $F_{f-ri}$ ,  $F_{f-le}$ ,  $F_{r-ri}$  et  $F_{r-le}$ ) du modèle bicycle (2.11), et que l'on regroupe par rapport aux roues gauches et droites en  $F_{le} = F_{f-le} + F_{r-le}$  et  $F_{ri} = F_{f-ri} + F_{r-ri}$  (Figure 3. 6), ces forces créent un couple sur la voiture qui tendrait à lui faire faire une rotation autour de son axe longitudinal ; cependant, il n'y a pas de rotation et la voiture reste quasi-horizontale tant que la résultante des forces  $F_{le}$  et  $F_{ri}$  est compensée par une autre exactement opposée dont les forces sont les réactions de la route induites par le poids du véhicule.

Notons respectivement les forces de réaction de la route au niveau des roues droites avant et arrière  $R_{z-le} = R_{z-le-f} + R_{z-le-r}$ , et de même pour le coté gauche,  $R_{z-ri} = R_{z-ri-f} + R_{z-ri-r}$ .

Enonçons alors la condition de stabilité latérale suivante :

#### Condition suffisante de stabilité latérale (2):

Le véhicule est stable latéralement, si le moment résultant des forces au sol au niveau des roues droites ( $R_{z-le}$  et  $F_{le}$ ) et gauches ( $R_{z-ri}$  et  $F_{ri}$ ) est nul.

Notons que plus le centre de gravité est haut (cas des véhicules étroits), plus le moment des forces latérales par rapport au centre de gravité  $G$  est élevé et, par suite, plus le transfert de charge sera important.

sens de renversement à la  
limite de la stabilité

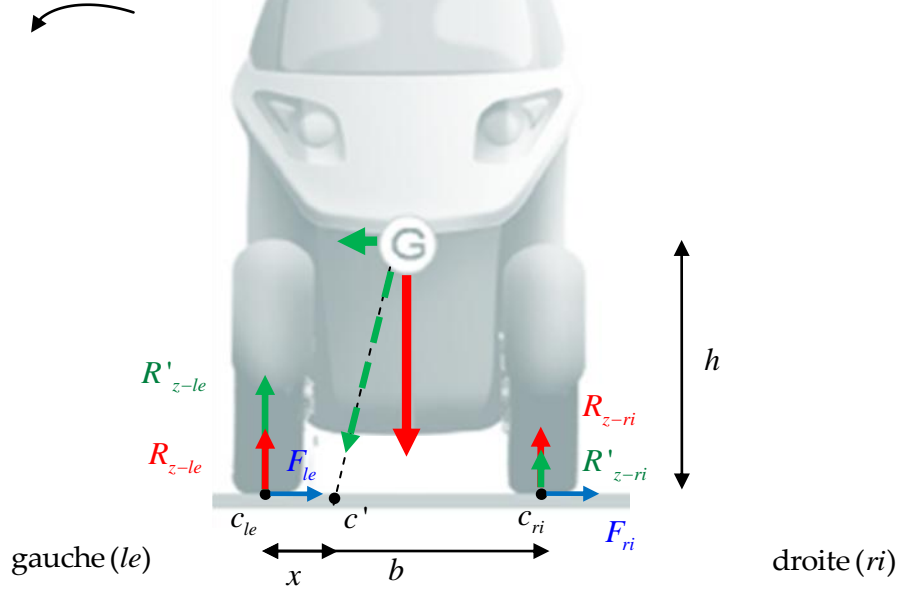


Figure 3. 6:  $F_{ri}$  et  $F_{le}$  sont les forces latérales appliquées sur le pneu.  $R_{z-ri}$  et  $R_{z-le}$  sont les réactions du sol lorsque  $a_{lat}=0$ , et  $R'_{z-ri}$  et  $R'_{z-le}$  les réactions du sol en virage

**Proposition 3.4:** Les réactions  $R_{z-ri}$  et  $R_{z-le}$  sont égales et de sens opposé au poids apparent au niveau du pneu correspondant, elles s'écrivent :

$$\begin{aligned} R_{z-ri} &= mg \frac{x}{b} = -P_{a/ri} \\ R_{z-le} &= mg \frac{b-x}{b} = -P_{a/le} \end{aligned} \quad (3.12)$$

**Démonstration :**

Soient  $c_{ri}$  et  $c_{le}$  les points de contact roues/ sol droite et gauche respectivement. La résultante des accélérations en  $G$ , coupe le plan du sol en  $c'$  (Figure 3. 6), avec la distance euclidienne entre les points  $c_{ri}$  et  $c_{le}$ ,  $[c_{ri}, c_{le}] = b$  et entre  $c_{le}$  et  $c'$ ,  $[c_{le}, c'] = x$ . Le poids apparent au niveau des roues droites et gauches s'écrit respectivement:

$$\begin{aligned} P_{a/d} &= -mg \frac{x}{b} \\ P_{a/g} &= -mg \frac{b-x}{b} \end{aligned} \quad (3.13)$$

D'où la proposition 3.4.

Les équations (3.13) sont bien celles obtenues dans (Kiencke & Nielsen 2000). Les auteurs considèrent également, dans cet ouvrage, le transfert de charge longitudinal dû à l'accélération et au freinage du véhicule.

## 4.2. Etude de la stabilité à partir du transfert de charge

Les trois cas étudiés précédemment (en considérant  $a_{per}$ ) sont examinés ci-après en terme de transfert de charge, à partir des expressions de  $R_{z-ri}$  et  $R_{z-le}$ .

### 4.2.1. Véhicule vertical en trajectoire rectiligne

En trajectoire rectiligne  $F_{ri} = F_{le} = 0$  et la résultante des accélérations en  $G$  est verticale. Elle coupe le segment  $[c_{ri}, c_{le}]$  en son milieu :  $x = b/2$ . D'où  $P_{a/d} = P_{a/g} = mg/2$  ; par conséquent,  $R_{z-ri} = R_{z-le}$  et le moment en  $G$  créé par ces forces est nul.

### 4.2.2. Véhicule vertical en trajectoire circulaire

Lorsque l'accélération latérale est non nulle, la résultante  $a_g$  des accélérations en  $G$  coupe le segment  $[c_{ri}, c_{le}]$  en  $c'$ , et  $R_{z-ri} \neq R_{z-le}$  (cf.(3.12)). S'il ne s'incline pas, le véhicule se renverse dès lors qu'une des réactions est nulle :  $R_{z-ri} = 0$  ou  $R_{z-le} = 0$ , ceci veut dire que le contact entre la roue et le sol est perdu. Or  $R_{z-ri} = 0$  pour  $x = 0$ , et  $R_{z-le} = 0$  pour  $x = y$ .

Nous retrouvons géométriquement (Figure 3. 6):

$$\frac{a_{lat}}{g} = \frac{b/2 - x}{h} \quad (3.14)$$

en remplaçant  $x$  par les valeurs limites  $x = 0$  ou  $x = y$ , nous retrouvons l'expression (3.9) :

$$a_{g/y-\max} = a_{lat-\max} = \pm \frac{gb}{2h}$$

### 4.2.3. Véhicule incliné en trajectoire circulaire

En trajectoire circulaire, pour assurer la *condition suffisante de stabilité* (2) (cf. paragraphe 4.1), c'est-à-dire la somme des moments nulle en  $G$ , il suffit que le véhicule s'incline de sorte à ce que la résultante  $a_g$  des accélérations en  $G$  soit alignée avec l'axe ( $z'$ ) du véhicule, c.-à-d. avoir  $x = b/2$ . Dans ces conditions, les résultantes de  $R_{z-le}^{ref}$  et  $F_{le}$  d'une part et de  $R_{z-ri}^{ref}$  et  $F_{ri}$  d'autre part seront égales et colinéaires à  $a_g$  assurant ainsi un moment nul en  $G$ .

En effet :

- si  $x = b / 2$ , alors  $R_{z-ri} = R_{z-le} = mg / 2$ , et nous considérons  $F_{le} = F_{ri}$ . Dans ces conditions, la résultante des forces de contact roues/sol fait avec la verticale un angle  $\theta_{roue}$  identique des cotés gauche et droite, tel que:

$$\tan \theta_{roue} = \frac{F_{le}}{R_{z-le}} = \frac{F_{le}}{R_{z-le}} = \frac{2F_{le/ri}}{mg}.$$

- Et en régime stationnaire, l'accélération latérale s'écrit  $a_{lat} = R_y / m = (F_{le} + F_{ri}) / m$  (cf. remarque page 60), d'où, la résultante  $a_g$  fait un angle  $\theta_g$  avec la verticale tel que :

$$\tan \theta_g = \frac{a_{lat}}{g} = \frac{2F_{le/ri}}{mg}.$$

D'où :  $\theta_{roue} = \theta_g$

Les valeurs des forces  $R_{z-ri}$  et  $R_{z-le}$  ne contiennent aucun renseignement sur la position angulaire  $\theta$  du véhicule. Ainsi, pour avoir une expression de  $\theta_n$  valable à chaque instant, et ce à partir de toute position arbitraire  $\theta \neq 0$ , la mesure de l'angle est requise.

**Proposition 3.5 :** L'angle d'inclinaison nominal assurant la stabilité du véhicule s'écrit :

$$\theta_n = \tan^{-1} \left( \tan \theta + \frac{b(R_{z-le} - R_{z-ri})}{2h(R_{z-le} + R_{z-ri}) \cos \theta} \right) \quad (3.15)$$

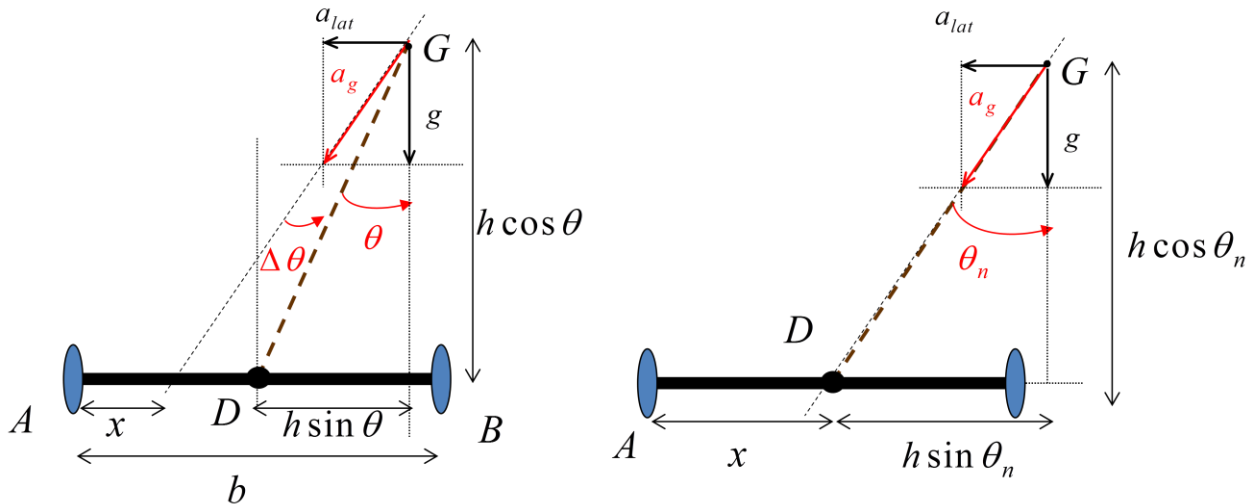


Figure 3.7 : Domaine de variation de  $a_{lat}$

**Démonstration :**

L'angle de stabilité nominal  $\theta_n = \theta + \Delta\theta$ , (cf. Figure 3.7).

L'expression de  $x$  peut être déduite des mesures de  $R_{z-ri}$  et  $R_{z-le}$  à partir de l'équation (3.12):

$$x = \frac{bR_{z-ri}}{(R_{z-ri} + R_{z-le})} \quad (3.16)$$

Nous pouvons d'autre part, partant de la Figure 3. 7, écrire l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \frac{h \sin(\theta + \Delta\theta)}{h \cos(\theta + \Delta\theta)} &= \frac{h \sin \theta + (b/2 - x)}{h \cos \theta} \\ \Rightarrow \tan(\theta_n) &= \frac{h \sin \theta + (b/2 - x)}{h \cos \theta} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Finalement, en utilisant (3.16) nous retrouvons l'équation (3.15), une autre expression de l'estimation de  $\theta_n$  à partir cette fois des forces de contact roues sol et de l'angle d'inclinaison  $\theta$  :

$$\theta_n = \tan^{-1} \left( \frac{h \sin \theta + \frac{b(R_{z-le} - R_{z-ri})}{2(R_{z-le} + R_{z-ri})}}{h \cos \theta} \right) = \tan^{-1} \left( \tan \theta + \frac{b(R_{z-le} - R_{z-ri})}{2h(R_{z-le} + R_{z-ri}) \cos \theta} \right)$$

Les expressions de  $\theta_n$  et  $\theta_{ref}$  retrouvées en (3.10) et (3.15) représentent plus ou moins l'angle nominale d'inclinaison, sans prendre en compte les dimensions du véhicule, notamment la largeur de sa base. Or ces dimensions permettront au véhicule de tolérer une certaine variation autour de  $\theta_n$  sans perdre son équilibre. Nous déterminons ci dessous cet intervalle  $\theta \in [\theta_n - \Delta\theta_{\min}; \theta_n + \Delta\theta_{\max}]$ . Nous déterminerons aussi la plage de variation de l'accélération latérale tolérée  $[a_{lat-\min}, a_{lat-\max}]$  pour une position angulaire  $\theta$  fixe.

## 5. Calcul de l'intervalle d'inclinaison assurant la stabilité vis-à-vis d'une accélération latérale donnée

Les positions en limite de renversement du véhicule sont illustrées sur la Figure 3. 8. Lorsque le véhicule s'incline, le centre de gravité du véhicule se déplace sur le cercle de centre  $D$  et de rayon  $h$ . Le véhicule ne se renverse pas tant que  $G$  appartient à l'arc de cercle  $G_1G_2$ .  $\Delta\theta_1$  et  $\Delta\theta_2$  symbolisent les valeurs limites de la variation de  $\theta$  autour de la position d'équilibre  $\theta_n$ .

Le véhicule est stable lorsque:

$$\theta \in [\theta_n - \Delta\theta_{\min}; \theta_n + \Delta\theta_{\max}] \quad (3.18)$$

$$\text{Avec } \begin{cases} \Delta\theta_{\max} = 90 + \theta_n - \cos^{-1}[(b/2h)\cos^2\theta_n + \sin\theta_n\sqrt{1-(b/2h)^2\cos^2\theta_n}] \\ \Delta\theta_{\min} = 90 - \theta_n - \cos^{-1}[(b/2h)\cos^2\theta_n - \sin\theta_n\sqrt{1-(b/2h)^2\cos^2\theta_n}] \end{cases} \quad (3.19)$$

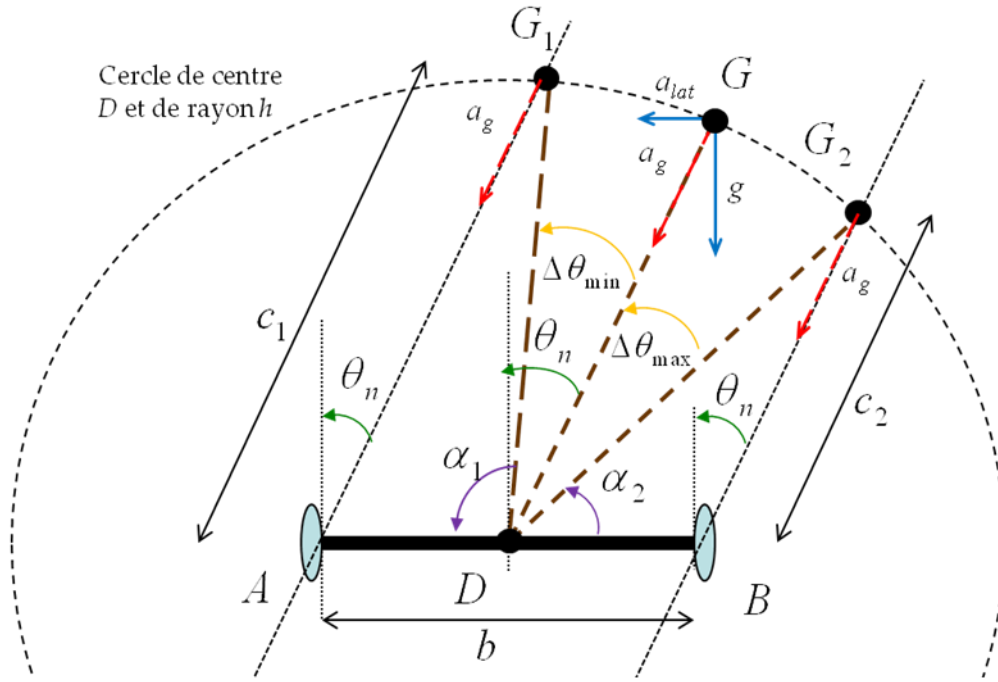


Figure 3. 8 : Positions d'inclinaison limites du véhicule pour une accélération latérale donnée- nous cherchons à calculer  $\Delta\theta_{\min}$  et  $\Delta\theta_{\max}$

### Démonstration :

Partant de la Figure 3. 8, on déduit :

$$\begin{cases} \Delta\theta_{\min} = 90 + \theta_n - \alpha_1 \\ \Delta\theta_{\max} = 90 - \theta_n - \alpha_2 \end{cases} \quad (3.20)$$

#### 1. Calcul de $\alpha_1$ et $\alpha_2$

Considérons le triangle  $G_1DA$  et appliquons le théorème de Pythagore pour calculer  $c_1$  :

$$(b/2)^2 + c_1^2 - bc_1 \cos(90 - \theta_n) = h^2 \Rightarrow c_1^2 - bc_1 \sin\theta_n - h^2 + (b/2)^2 = 0$$

Cette équation du second ordre admet comme solution:

$$c_1 = (b/2) \sin \theta_n \pm \sqrt{h^2 - (b/2)^2 \cos^2 \theta_n}$$

En appliquant le théorème Pythagore une nouvelle fois pour exprimer  $\alpha_1$  on obtient :

$$\begin{aligned} c_1^2 &= h^2 + (b/2)^2 - hb \cos \alpha_1 \\ &= (b/2)^2 \sin^2 \theta_n + h^2 - (b/2)^2 \cos^2 \theta_n \pm b \sin \theta_n \sqrt{h^2 - (b/2)^2 \cos^2 \theta_n} \\ \Rightarrow h^2 + (b/2)^2 - hb \cos \alpha_1 &= (b/2)^2 \underbrace{(\sin^2 \theta_n - \cos^2 \theta_n)}_{(1-2\cos^2 \theta_n)} + h^2 \pm b \sin \theta_n \sqrt{h^2 - (b/2)^2 \cos^2 \theta_n} \\ \Rightarrow -hb \cos \alpha_1 &= -(b/2) \cos^2 \theta_n \pm \sin \theta_n \sqrt{h^2 - (b/2)^2 \cos^2 \theta_n} \\ \Rightarrow \cos \alpha_1 &= (b/2h) \cos^2 \theta_n \pm \sin \theta_n \sqrt{1 - (b/2h)^2 \cos^2 \theta_n} \end{aligned}$$

On a également, considérant le triangle  $G_2DB$  :

$$\begin{aligned} c_2 &= (b/2) \sin \theta_n \pm \sqrt{h^2 - (b/2)^2 \cos^2 \theta_n} \\ \cos \alpha_2 &= (b/2h) \cos^2 \theta_n \mp \sin \theta_n \sqrt{1 - (b/2h)^2 \cos^2 \theta_n} \end{aligned}$$

Or  $\alpha_1 > \alpha_2$  d'où :

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 &= (b/2h) \cos^2 \theta_n + \sin \theta_n \sqrt{1 - (b/2h)^2 \cos^2 \theta_n} \\ \cos \alpha_2 &= (b/2h) \cos^2 \theta_n - \sin \theta_n \sqrt{1 - (b/2h)^2 \cos^2 \theta_n} \end{aligned}$$

## 2. Calcul de $\Delta\theta_{\max}$ et $\Delta\theta_{\min}$

Finalement, nous obtenons bien l'expression (3.19) :

$$\begin{cases} \Delta\theta_{\min} = 90 + \theta_n - \alpha_1 = 90 + \theta_n - \cos^{-1}[(b/2h) \cos^2 \theta_n + \sin \theta_n \sqrt{1 - (b/2h)^2 \cos^2 \theta_n}] \\ \Delta\theta_{\max} = 90 - \theta_n - \alpha_2 = 90 - \theta_n - \cos^{-1}[(b/2h) \cos^2 \theta_n - \sin \theta_n \sqrt{1 - (b/2h)^2 \cos^2 \theta_n}] \end{cases}$$

Cas particulier : Lorsque le véhicule est vertical ( $\theta = 0$ ) et l'accélération latérale est nulle, on a :

$$\Delta\theta = \Delta\theta_{\max} = \Delta\theta_{\min} = 90 - \cos^{-1}(b/2h) \Rightarrow \sin \Delta\theta = (b/2h)$$

Remarque : ce calcul est valable quel que soit le sens de l'inclinaison (gauche ou droite)

## 6. Calcul de l'intervalle de variation de l'accélération latérale tolérée en inclinaison pour $\theta$ donné

Dans le paragraphe précédent, nous avons calculé l'intervalle angulaire (inclinaison) acceptable, pour une accélération latérale constante. Inversement, nous examinons dans ce

paragraphe la variation d'accélération latérale admissible lorsque le véhicule est en équilibre en inclinaison, i.e.  $\theta = \theta_n$ .

Pour une valeur d'inclinaison fixée, la stabilité du véhicule est garantie dans l'intervalle:

$$g(\tan \theta_n - \frac{b}{2h \cos \theta_n}) < a_{lat} < g(\tan \theta_n + \frac{b}{2h \cos \theta_n}) \quad (3.21)$$

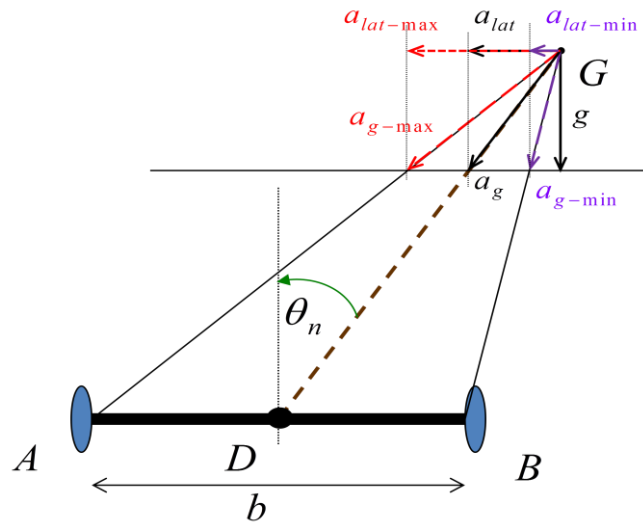


Figure 3. 9 : Limites minimale et maximale de l'accélération latérale tolérée pour un angle d'inclinaison  $\theta_n$  donné

### Démonstration :

La Figure 3. 9 représente les valeurs limites de  $a_{lat}$ .  $h$  étant la distance entre  $G$  et  $D$ , nous constatons :

$$\begin{aligned} \frac{a_{lat}}{h \sin \theta_n} &= \frac{a_{lat-\min}}{h \sin \theta_n - (b/2)} = \frac{a_{lat-\max}}{h \sin \theta_n + (b/2)} \\ \Rightarrow \begin{cases} a_{lat-\min} = a_{lat} (1 - \frac{b}{2h \sin \theta_n}) \\ a_{lat-\max} = a_{lat} (1 + \frac{b}{2h \sin \theta_n}) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a_{lat-\min} = g(\tan \theta_n - \frac{b}{2h \cos \theta_n}) \\ a_{lat-\max} = g(\tan \theta_n + \frac{b}{2h \cos \theta_n}) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.22)$$

D'où l'intervalle donné par l'équation (3.21).



Ayant étudié la dynamique du véhicule en virage relativement aux accélérations du centre de gravité et au transfert de charge, et étudié les conditions de stabilité du véhicule, on aborde dans la suite la question **des stratégies de commande** réduisant les risques de renversement.

## 7. Différentes stratégies pour le contrôles latéral des VEI.

L'objectif ici est le contrôle de l'inclinaison du véhicule de sorte à assurer sa stabilité, gardant une marge vis-à-vis des variations décrites dans (3.19) et (3.21). Notons que la stabilité latérale du véhicule et le confort des passagers vont de pair. A partir des conditions suffisantes (1) et (2) de la stabilité explicitées aux paragraphes 3.4 et 3.5 ci-dessus, deux voies sont possibles:

- 1- Chercher à avoir une accélération perçue nulle au niveau du centre de gravité,  $a_{per} = 0$ ,
- 2- Chercher à avoir des forces égales au niveau des contacts roues/sol, et par conséquent un moment nul au centre de gravité.

Les deux voies sont équivalentes en ce sens que si l'une est satisfaite l'autre l'est aussi. La première voie exploite naturellement la mesure de l'accélération perçue issue d'une centrale inertielle, alors que la seconde est plus adaptée à un véhicule doté de capteurs pouvant mesurer le poids (apparent) au niveau des suspensions des roues.

Pour satisfaire l'objectif général annoncé, les stratégies de commande peuvent être diverses :

- 1- La stabilité étant assurée par l'**inclinaison** du véhicule, il est assez naturel de procéder à un **asservissement de position angulaire**, considérant l'angle d'inclinaison de référence (cf. équation (3.10)) assurant  $a_{per} \approx 0$  connu à chaque instant. C'est la stratégie très largement adoptée les chercheurs travaillant sur la problématique des VEIs. Nous exposerons les travaux correspondants dans le paragraphe 9 de ce chapitre.
- 2- La stratégie consistant à asservir  $\theta$  n'est pas sans inconvénients : des approximations sont faites pour obtenir à chaque instant l'angle de référence adapté, et son calcul induit potentiellement un retard dans la commande. Une solution alternative consiste à **asservir directement l'accélération perçue**, et poursuivre l'objectif  $a_{per} = 0$ . **C'est la stratégie que nous proposons.**
- 3- La troisième piste, consiste à poursuivre l'objectif d'un moment nul en  $G$  indirectement par l'asservissement de l'angle d'inclinaison estimé à partir de la donnée de  $R_{z-ri}$  et  $R_{z-le}$  (3.15). Cette stratégie est similaire à la première en termes de commande : cela revient à un asservissement de l'angle d'inclinaison, avec un angle de référence obtenu à partir de différentes grandeurs mesurées (cf. équation (3.15)). Si l'angle de référence est plus précis, cette stratégie s'avère coûteuse en termes de capteurs.

- 4- Une dernière piste pourrait être envisagée (nous ne l'avons pas explorée), procédant au contrôle direct des forces de  $R_{z-ri}$  et  $R_{z-le}$  ; ces forces doivent en ce cas être mesurées ou estimées, ce qui peut, comme dans le cas de la stratégie précédente (3), se révéler coûteux et/ou compliqué.

Compte tenu du fait que les mesures les plus aisément disponibles sur le véhicule sont celles fournies par une centrale inertielle, **nous avons jugé mieux adapté le choix de la régulation directe de  $a_{per}$ .**

Deux moyens d'action seront envisagés pour contrôler l'accélération latérale du véhicule : les systèmes DTC et STC.

## 8. Entrées de commande et moyens d'action : DTC et STC

Deux architectures mécaniques d'actionnement de l'inclinaison sont considérées : les systèmes **DTC (Direct Tilt Control)** et **STC (Steering Tilt Control)** permettent tous deux d'agir sur l'accélération latérale perçue.

### 8.1. Direct Tilt Control

#### 8.1.1. Définition

Le système DTC est doté d'un actionneur au niveau de son axe longitudinal, appliquant un couple autour de l'axe ( $x$ ) pour incliner le véhicule. Le contrôle de l'inclinaison est alors réalisé à travers l'application du couple délivré par l'actionneur. Ce couple, noté  $M_t$ , constitue l'entrée de commande.

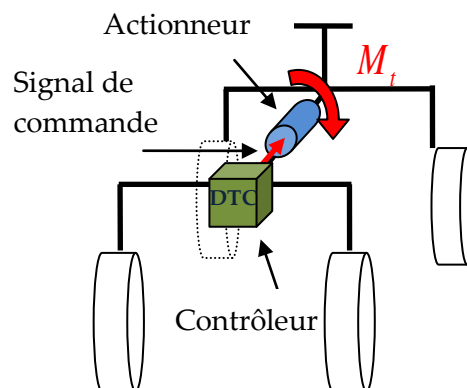


Figure 3. 10 : Modalités d'inclinaison du système DTC

En virage, l'accélération latérale est proportionnelle à la vitesse longitudinale ( $a_{lat} = \ddot{y} + v\dot{\psi} \cos \beta$ , cf. (3.3)). Donc pour un même angle de braquage, l'accélération latérale est plus élevée à grande vitesse. Il en résulte que le couple  $M_t$  requis est plus important à grande vitesse puisqu'il doit assurer l'inclinaison désirée, dans le sens opposé à celui de l'accélération latérale. C'est à vitesse élevée qu'il y a davantage de risque de saturation de l'actionneur.

Notons que si le système DTC ne fait que *rétroagir* à partir de la mesure de l'accélération mesurée, image de celle perçue par les passagers, il risque d'induire un sentiment désagréable chez les passagers. C'est que conduisant un motorcycle, le motard incline son véhicule simultanément avec la prise du virage, de sorte que l'accélération perçue reste quasiment nulle, même en transitoire.

## 8.2. Steering Tilt Control

### 8.2.1. Définition

Un véhicule doté d'un système STC est mécaniquement différent d'un véhicule équipé d'un système DTC. L'entrée de commande est l'angle de braquage  $\delta$ , et le véhicule est doté d'un système steer-by-wire, ce qui implique que la liaison mécanique entre la colonne de direction et les roues est remplacée par un système électrique. L'angle au volant  $\delta_{cond}$  imposé par le conducteur peut alors différer de l'angle aux roues.

Dans ce mémoire, nous considérons un système steer-by-wire couplé avec le système mécanique, de sorte que le signal de commande issu du contrôleur  $\delta_c$  module l'angle de braquage désiré du conducteur  $\delta_{cond}$ ,  $\delta = \delta_{cond} + \delta_c$ , Figure 3. 11.

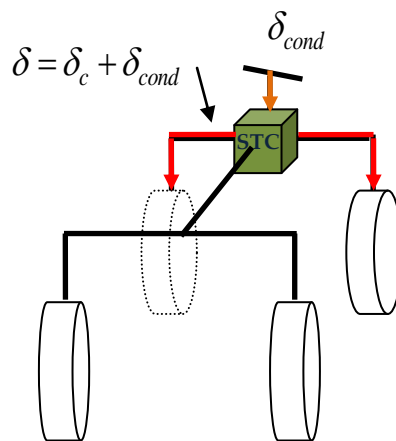
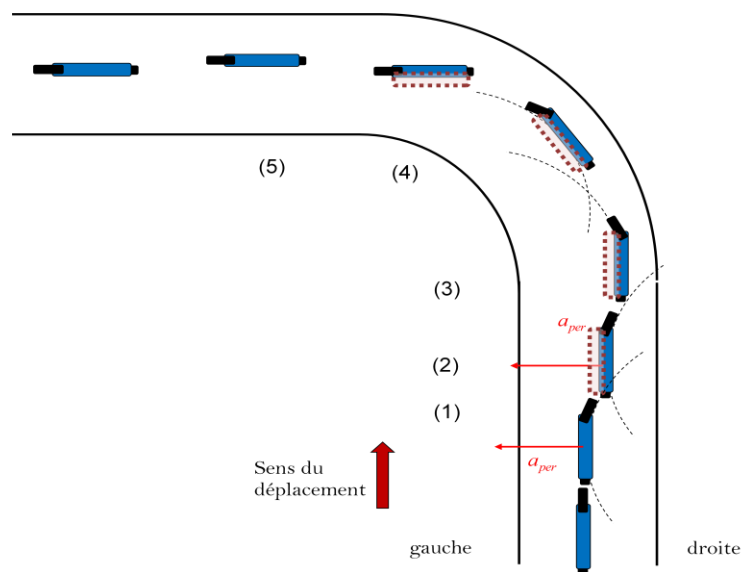


Figure 3. 11 : Système STC, l'angle de braquage est l'angle du conducteur modulé par le signal du contrôleur

Reste à expliciter l'incidence du signal de commande  $\delta_c$  sur l'inclinaison du véhicule et *in fine* sur sa stabilité latérale. Prenons pour cela modèle sur le pilotage des véhicules à 2 roues. Pour incliner son véhicule, un motard crée un moment en déplaçant son propre poids d'une part, et en 'contre braquant' d'autre part. Le phénomène de contre braquage est observé notamment sur les virages à haute vitesse ; il est cependant bref au point d'être parfois imperceptible. Les étapes du contre braquage sont illustrées sur la Figure 3. 12.



**Figure 3. 12 : Trajectoire d'un véhicule étroit ou deux roues, avec phénomène de contre braquage en virage. Les cadres pointillés représentent la position du toit du châssis incliné.**

Pour amorcer un virage à gauche, étape (1), et pour un court instant, la roue avant est orientée vers la droite (d'où la terminologie 'contre-braquage'), créant ainsi une accélération latérale qui inclinera le véhicule vers la gauche, étape (2). Ensuite les roues sont réorientées dans le sens du virage, (3). En (3) et (4), le véhicule négocie le virage 'en équilibre' : l'accélération latérale est compensée par l'inclinaison, assurant ainsi  $a_{per} = 0$ . Le véhicule se redresse enfin à la sortie du virage (5).

Il s'agit donc de s'appuyer sur l'angle de braquage et par suite sur le moment induit par  $a_{lat}$  pour incliner le véhicule. Rappelons l'expression  $a_{lat} = \ddot{y} + v\dot{\psi} \cos \beta$ . A *basse vitesse*, sa valeur n'est pas assez importante pour pouvoir assurer l'inclinaison du véhicule, excepté si l'on augmente  $\dot{\psi}$ , donc la valeur de  $\delta$  en contre braquage, ce qui présente l'inconvénient de modifier notablement la trajectoire, qui s'éloigne alors de la trajectoire souhaitée par le conducteur.

A *grande vitesse* en revanche, cette stratégie est particulièrement efficace : la valeur de  $a_{lat}$  est importante d'une part, et l'effet des forces gyroscopiques au niveau des pneus ont une influence favorable d'autre part. Rappelons l'équation correspondant à la dynamique d'inclinaison, cf. équation (2.15) :

$$(I_x + mh^2 \sin^2 \theta) \ddot{\theta} = (mgh \sin \theta - mh\dot{\theta}^2 \cos \theta \sin \theta - (F_{sv} \cos \delta + F_{lv} \sin \delta + F_{sh})h \cos \theta + M_t + \underbrace{2(I_{roue\_v} - I_{roue\_rot})\omega(\dot{\psi} + \dot{\delta} \cos \beta)}_{\text{effet gyroscopique}} + hF_s \sin^2 \theta) \quad (3.22)$$

La vitesse de rotation des roues  $\omega$  est égale au rapport de la vitesse longitudinale sur le rayon de la roue  $r_r$  :  $\omega = v / r_r$ . Plus la vitesse augmente, plus les moments gyroscopiques aident à l'inclinaison du véhicule, puisqu'ils contribuent à l'accélération du mouvement de  $\theta$ . La même remarque est valable par rapport à la vitesse de variation de l'angle de braquage  $\dot{\delta}$ . Plus la variation de  $\delta$  est rapide, plus la dynamique d'inclinaison est accélérée. L'effet de ces moments devient significatif à partir de  $V = 40 \text{ Km/h}$  soit  $11 \text{ m/sec}$ .

### 8.3. Comparaison des caractéristiques DTC et STC

Nous cherchons, au travers du Tableau 3. 1, à résumer les caractéristiques des deux systèmes DTC et STC afin d'en donner une vue globale.

Elément de comparaison	DTC	STC
Entrée de commande	Couple d'inclinaison $M_t$ délivré par un actionneur dédié.	Signal $\delta_c$ modulant l'angle de braquage $\delta$
Comportement à basse vitesse	Le système DTC est particulièrement efficace à basses vitesses. $a_{per}$ est relativement faible et par conséquent la sollicitation de l'actionneur en phase transitoire reste acceptable.	Le système STC n'a aucune action à vitesse nulle ; à basse vitesse il lui est nécessaire d'avoir une commande de forte amplitude, induisant un écart important vis-à-vis de la trajectoire souhaitée.
Comportement à vitesse élevée	$a_{per}$ , proportionnelle à la vitesse, est de valeur relativement grande et nécessite la mise en œuvre d'un couple important, avec risque de saturation des actionneurs du système DTC.	C'est à vitesse élevée que le système STC est le plus efficace. Un petit angle de contre braquage suffit pour créer l'effet désiré. Notons tout de même que le dispositif peut être inopérant en cas de faible adhérence; dans ces conditions la modification de l'angle de braquage ne pourra pas modifier correctement le lacet du véhicule et donc son accélération latérale.

Trajectoire du véhicule	Trajectoire identique à celle désirée par le conducteur.	Le système STC modifie la trajectoire souhaitée par le conducteur. L'hypothèse selon laquelle le conducteur adaptera facilement et en toute sécurité sa conduite à ce genre de système nécessite certaines validations, mais le concept peut être appliqué à moindres risques sur un véhicule STC à 4 roues.
Ressenti des passagers	Les accélérations perçues en régime transitoire sont susceptibles de prendre des valeurs suffisamment importantes pour être désagréables ; ceci est d'autant plus vrai dans le cas où l'inclinaison du véhicule n'est déclenchée qu'à l'apparition de $a_{per}$ et non pas de façon simultanée avec la prise du virage.	L'inclinaison du véhicule est presque simultanée avec la prise du virage. Seul le contrebraquage risque d'être perçu négativement.
Consommation d'énergie	Liée aux performances dynamiques et statiques du contrôleur (consommation énergétique liée au couple appliqué par l'actionneur)	Notons l'absence d'actionneur dédié à l'inclinaison, et par conséquent une consommation énergétique réduite, l'énergie utilisée pour l'inclinaison résultant de l'accélération latérale induite par le contrebraquage.

**Tableau 3. 1 : Comparaison des Commandes DTC et STC**

Pour profiter des avantages de chacune des deux stratégies et de leurs efficacités complémentaires en fonction de la vitesse, des travaux récents ont porté sur la solution hybride dite **SDTC**, pour des véhicules dotés à la fois d'un actionneur d'inclinaison et d'un système 'steer-by-wire'. Ces travaux sont présentés dans le paragraphe 9 suivant. Les premières solutions envisagées sont monovariabiles, une seule entrée de commande étant active à la fois, avec commutation d'un système vers l'autre en fonction de la vitesse. Nous nous intéressons ici, avant d'évoquer ces différents travaux, à expliciter de manière générale les problèmes qui interviennent lors de la cohabitation de ces deux contrôleurs.

#### **8.4. Problématiques de transition DTC-STC et STC-DTC**

Les systèmes STC sont en général mis en œuvre à partir d'une vitesse seuil  $V_s \approx 40 \text{ Km/h}$  environ tandis que les systèmes DTC sont actifs en deçà. Le passage d'un système vers l'autre par commutation s'avère complexe malgré tout ; les signaux de commande agissent de façon

antagoniste en phases transitoires (So Snag-Gyun & Karnopp Dean 1997b; Piyabongkran D. et al. 2004; Hibbard & Karnopp 1996).

#### 8.4.1. Passage STC-DTC ou DTC-STC en régime transitoire- amorce de virages

- En transitoire, le système STC provoque un contre-braquage, l'accélération latérale créée servant à l'inclinaison du véhicule. Si le passage **STC-DTC** intervient dans cette phase, la commande DTC cherchera à incliner le véhicule dans le sens opposé à l'accélération latérale perçue, donc dans le mauvais sens. En ce cas **les deux signaux de commande sont conflictuels** ou antagonistes.
- Si le passage **DTC-STC** intervient en amorce de virage, les signaux de commande ne sont pas conflictuels, mais le couple d'inclinaison DTC  $M_i$  s'annule brutalement alors que le véhicule amorçait son inclinaison. Cette interruption crée une discontinuité et des pics dans les signaux. C'est particulièrement vrai si en plus la commande DTC contient un dérivateur par exemple.

#### 8.4.2. Passage STC-DTC ou DTC-STC en régime permanent

L'erreur en régime permanent diffère potentiellement selon qu'il s'agisse du mode DTC ou STC. En excluant le cas où les erreurs statiques sont nulles, la commutation entre les deux systèmes DTC et STC crée aussi dans ce cas une discontinuité. Ce phénomène requiert une analyse et des adaptations *ad hoc*. Des exemples illustratifs sont donnés dans le paragraphe suivant en s'appuyant sur les travaux de la littérature. Les stratégies DTC, STC ainsi que SDTC seront passées en revue.

## 9. Etat de l'art des systèmes DTC, STC, et SDTC

Après avoir défini le modèle du véhicule, explicité la problématique de la stabilité latérale, et calculé les différentes grandeurs concernées (accélération latérale, accélération perçue, forces de réactions, etc.), il est alors possible de reporter de façon claire les travaux et résultats obtenus par différents chercheurs. Comme annoncé au paragraphe état de l'art des modèles, (chapitre 2 paragraphe 4), Karnopp est parmi les premiers chercheurs à considérer le problème de stabilité des VEIs.

Dans (Hibbard Robbin et al. 1996) les auteurs considèrent la problématique des véhicules DTC et proposent d'asservir l'angle d'inclinaison à la valeur de la référence calculée selon  $\theta_{ref} = V_x \dot{\psi} / g$ , expression encore plus simplifiée de (3.10). L'accélération latérale est approximée par  $V_x \dot{\psi}$ , ignorant ainsi la dépendance en  $\ddot{y}$  (cf. équation 3.3)

- Le correcteur utilisé pour l'asservissement de position est un régulateur Proportionnel Dérivé qui a en entrée l'erreur sur  $\theta$ ,  $e = \theta - \theta_{ref}$ , avec un feedforward fonction de  $a_{lat} = V_x \dot{\psi}$ .
- Le modèle conceptuel utilisé pour le réglage du régulateur est réduit à la fonction de transfert simplifiée entre  $\theta$  et  $M_t$ , avec prise en compte du moment de rappel. La variation des pôles de ce transfert en fonction des gains du régulateur y est analysée.
- Notons que si les motivations pour un tel schéma de commande sont claires : rétroaction passive pour une commande colocalisée (Preumont 1997), les garanties de stabilité ne sont pas apportées, le calcul en temps réel de  $\theta_{ref}$  à partir de la vitesse de lacet ( $\theta_{ref} = V_x \dot{\psi} / g$ ) constituant une boucle externe implicite.

Dans (So S. et al. 1997a), les auteurs s'intéressent à un système où STC et DTC agissent en alternance, selon la vitesse longitudinale du véhicule.

- Un régulateur PD filtré est utilisé pour le système DTC :  $M_t = (K_p + \frac{K_d}{\tau_1 s + 1})(\theta - \theta_{ref})$ .
- La stratégie STC utilise de même un PD avec dérivée filtrée pour calculer l'angle de braquage approprié.
- Les auteurs exploitent la relation approximée entre  $a_{lat}$  et  $\delta$  :  $a_{lat} = \ddot{y} + V \dot{\psi} = (\dot{V}_r \delta + V l_r \dot{\delta} + V^2 \delta) / (l_f + l_r)$ , obtenue i) en considérant l'angle de braquage conducteur  $\delta_{cond}$  égal à l'angle de lacet  $\delta_{cond} = \psi$  et ii) en approximant  $\dot{y} = \frac{l_r}{l_f + l_r} V_x \dot{\delta}$ . Ainsi  $\theta_{ref-STC} = a_{lat} / g = f(\delta, \dot{\delta})$  et le signal de commande STC s'écrit :  

$$\delta = (G_p + \frac{G_d s}{\tau_2 s + 1})(\theta - \theta_{ref-STC})$$
- Les deux contrôleurs sont simulés chacun à part en première partie considérant uniquement les fonctions de transferts simplifiées entre  $\delta$  et  $\theta$  en STC et entre le couple d'inclinaison  $M_t$  et  $\theta$  pour DTC. Les résultats proposés montrent que l'accélération perçue en DTC est bien plus importante qu'en STC, et que dans le même temps, l'angle de braquage est significativement modifié en STC ; les trajectoires du véhicule ne sont pas représentées.
- La commutation entre les systèmes STC et DTC est également considérée, aux vitesses de 7.5 m/s et 8.5 m/s selon un cycle d'hystérésis. Pour contourner les problèmes de saut quant à la valeur de la commande en régime statique (dus à l'action dérivée comme explicité précédemment dans le paragraphe 8.4.2), les auteurs proposent un gain variable pour le STC, qui augmente progressivement pour atteindre la valeur optimale.



Finalement, dans (So S. et al. 1997b) les auteurs remplacent le régulateur PD par un PI pour le système DTC, pour résoudre le problème de l'erreur statique et minimiser la discontinuité lors de la commutation STC-DTC, ainsi qu'ils ajoutent un gain de rétroaction supplémentaire fonction de  $\theta$  et  $\dot{\theta}$ . La problématique des signaux de commande antagonistes en régime transitoire n'est pas évoquée.

La validation de ces travaux reste très basique puisque aucune étude de stabilité n'est disponible, les accélérations latérale  $a_{lat}$  et perçue  $a_{per}$  sont reconstruites par leurs expressions mathématiques approximées et ne sont pas supposées directement mesurées ; les simulations sont réalisées sur un modèle simplifié, linéarisé autour de  $\theta=0$ , considérant les dynamiques latérale et longitudinale.

Toujours aux Etats Unis, plus récemment, à l'université de Minneapolis, les chercheurs ont abordé plusieurs aspects de la commande latérale des VEI. Dans (Piyabongkran D. et al. 2004), les auteurs proposent trois stratégies de commande DTC, cherchant à asservir l'angle d'inclinaison à  $\theta_{ref} = \tan^{-1}(V\dot{\psi}/g)$ , se basant sur le modèle latéral linéarisé (2.22).

- La première stratégie s'appuie sur un 'régulateur Linéaire Quadratique' conçu à partir d'un modèle très simplifié dont les seuls états correspondent à  $\theta$  et  $\dot{\theta}$ , ignorant sciemment le couplage avec d'autres variables importantes telles que la vitesse de lacet. Un modèle du conducteur est implémenté pour corriger les erreurs sur la trajectoire en simulation.
- La seconde stratégie repose sur la commande LQR avec un aspect prédictif apporté par l'estimation prédictive de l'angle d'inclinaison de référence, à partir de la connaissance de la trajectoire future (*i.e.* caméra embarquée, GPS, etc. qui permettent de prévoir la courbure de la route). L'angle de référence est obtenu au travers d'une commande prédictive à horizon fuyant 'Receding Horizon controller'.
- La troisième stratégie de commande proposée est non linéaire ; elle procède par inversion de la dynamique de l'angle d'inclinaison (linéarisation par bouclage), qui correspond à la 4ème ligne de l'équation (2.17), et qui résulte en une dynamique de double intégrateur  $M_t = \ddot{\theta}$ . Un PID est ensuite utilisé tel que  $M_t = (K_p + K_d s + K_i / s)(\theta - \theta_{ref})$ .

Les simulations montrent que le contrôleur non linéaire (stratégie 3) est nettement plus performant que le régulateur LQ (stratégie 2) quant à la minimisation du couple d'inclinaison ; les meilleures performances sont malgré tout obtenues avec le contrôleur RCH (stratégie 2), soulignant l'importance de l'anticipation quant aux performances transitoires du contrôle d'inclinaison.

Dans (Kidane S. et al. 2006), les auteurs abordent la problématique du dévers de la route. En effet, lorsque l'angle de dévers de la route  $\eta$  n'est pas nul, l'expression  $\theta_{ref} = \tan^{-1}(V\dot{\psi} / g)$  n'est plus valable et l'angle  $\eta$  est introduit avec une approximation tel que :  $\theta_{ref} = \tan^{-1}(V\dot{\psi} / g) + \eta$ .

La commande SDTC est évoquée dans (Kidane S. et al. 2008; Kidane et al. 2010). Les auteurs proposent 3 stratégies DTC, et 3 stratégies STC, pour choisir finalement les stratégies assurant les meilleures commutations SDTC.

Les stratégies DTC, se basent toutes sur un contrôleur PD, mais diffèrent par l'expression de la référence  $\theta_{ref}$  choisie:

$$1. \quad \theta_{ref} = \frac{V\dot{\psi}}{g} = \frac{V^2}{gR}$$

$$2. \quad \theta_{ref} = \frac{\ddot{y} + V\dot{\psi}}{g} - \frac{2(I_{wheel\_w} - I_{wheel\_rot})w\dot{\psi} / (hm)}{g}$$

$$3. \quad \theta_{ref} = k_s(\delta_{cond}) \text{ avec } \delta_{cond} \text{ angle de braquage imposé par le conducteur.}$$

- La première expression est la plus simplifiée ; elle néglige le terme de glissement latéral  $\ddot{y}$ , ce qui conduit à une augmentation significative du couple transitoire.
- La seconde expression est plus rigoureuse et le terme  $-\frac{2(I_{wheel\_w} - I_{wheel\_rot})w\dot{\psi} / (hm)}{g}$ , qui prend en compte les moments gyroscopiques au niveau des roues, conduit à une erreur statique nulle ; elle est cependant difficile à calculer.
- Finalement, pour contourner le problème de signaux de commande STC et DTC contradictoires, les auteurs retiennent la troisième expression (i.e.  $\theta_{des} = k_s(\delta_{cond})$ ), bien que très approximative et n'optimisant pas le couple requis en transitoire.

Les stratégies STC utilisent également un régulateur PD, avec un terme additionnel  $\delta_{ss}$ , qui permet d'obtenir en régime permanent un angle de braquage égal à celui désiré par le conducteur :  $\delta = K_p(\theta - \theta_{ref}) + K_d(\dot{\theta} - \dot{\theta}_{ref}) + \delta_{ss}$ .

Les trois stratégies STC diffèrent par leur choix de  $\delta_{ss}$  :

1. l'expression proposée la plus complète utilise la valeur de variables non mesurées et donc inaccessibles,
2. une expression alternative procède à la réécriture de l'expression 1. en fonction de  $\theta_{ref}$  et de paramètres à estimer,
3. la dernière stratégie remplace  $\delta_{ss}$  par un terme intégral sur l'écart  $(\theta - \theta_{ref})$ . C'est la solution retenue pour la commande SDTC.

Le contrôleur SDTC est alors constitué de deux PID indépendants ; un contrôleur génère le couple moteur  $M_t$ , le second l'angle de braquage  $\delta$  appliqué aux roues. Soient  $V_o$  et  $V_f$  deux valeurs seuils,  $V_o < V_f$ , pour la vitesse longitudinale. Pour  $V < V_o$ , le système DTC est actif ; pour  $V > V_f$ , le système STC prend le relais ; pour  $V_o < V < V_f$  enfin, une fonction dépendant de  $V$  partage le contrôle entre DTC et STC. Le contrôleur est validé en simulation et expérimentalement dans (Kidane S. et al. 2010). Les résultats sont acceptables, mais l'accélération latérale perçue n'est pas donnée, et aucune étude de stabilité n'est proposée.

D'autre part, comme déjà mentionné, le contrôleur SDTC proposé n'optimise pas explicitement l'énergie requise pour la mise en œuvre de la stratégie ou le suivi de trajectoire.

Aux pays bas, la **société Carver Europe** (précédemment Vandenbrink) a développé le véhicule inclinable à trois roues dénommé Carver. Ce véhicule a été commercialisé à partir de 2007 au prix de 30,000 euros, mais en 2009, Carver Europe déclare faillite, faute de demandes suffisantes. Le véhicule Carver est doté d'un système DVC (Dynamic Vehicle Control) qui utilise les stratégies DTC et STC. Les publications relatives à ce système restent évasives, sans doute de part le caractère confidentiel du projet. Mais plusieurs brevets sont déposés séparément, concernant l'usage de l'angle de braquage dans le contrôleur d'inclinaison des VEI (C. R. Van Den Brink et al. 1999), l'action simultanée des systèmes STC et DTC (C. R. Van Den Brink & Kroonen 2000), et aussi la distribution du signal d'angle de braquage conducteur entre les références de l'angle de braquage des roues et de l'angle d'inclinaison (C. R. Van Den Brink & Kroonen 1999).

Au Royaume Uni, à l'université de Bath, les chercheurs travaillent sur **le projet Clever**, financé par l'Union Européenne de 2002 à 2005. C'est un véhicule à trois roues, pour lequel seuls le châssis et la roue avant sont inclinables. Ce véhicule est muni d'un système DTC, fonctionnant avec des actionneurs hydrauliques. A la fin du projet, les chercheurs ont poursuivi l'étude sur la problématique du STC. Dans (J. Berote et al. 2008) les auteurs s'intéressent surtout à l'analyse de la dynamique du Clever, en soulignant l'importance du braquage des roues arrières pour limiter le risque de sur-virage du véhicule, d'autant que les roues arrières du Clever ne sont pas inclinables. Les auteurs évoquent aussi l'avantage d'avoir l'axe de rotation du véhicule incliné (et non pas horizontal), ce qui impacte l'inertie du mouvement d'inclinaison. Le contrôleur DTC reste très basique : un PD cherche à asservir l'angle d'inclinaison.

Une analyse poussée du comportement du conducteur d'un véhicule STC est présentée dans (Van Poelgeest A. et al. 2007). Cet article s'intéresse surtout au suivi de trajectoire en STC, et étudie à quel point le conducteur est capable d'adapter sa conduite pour rester sur la trajectoire désirée en dépit de la différence entre l'angle de braquage du volant et celui appliqué aux roues. Plusieurs tests et différents scénarii sont proposés sur le véhicule Honda Gyro, pour conclure que le meilleur contrôleur pour le suivi de trajectoire serait le conducteur lui même

avec une certaine connaissance du comportement du véhicule. Les auteurs retiennent aussi quelques points potentiellement utiles pour concevoir un système STC performant.

Dans **(Roberston J. et al. 2012)**, les auteurs s'intéressent au suivi de trajectoire pour un système SDTC. Le contrôleur proposé est multivariable et les deux entrées de commandes  $\delta$  et  $M_t$  sont actives simultanément. Le système DTC est un PID classique appliqué à l'erreur sur l'angle d'inclinaison, et le système STC module l'angle de braquage du conducteur  $\delta = \delta_{cond} + \delta_c$  avec  $\delta_c = K_s(\theta - \theta_{ref})$  et  $K_s$  un gain variable, non-linéaire dépendant de la vitesse. Les résultats de simulation montrent un décalage important entre la trajectoire désirée et la trajectoire réelle, excepté dans le cas où l'angle de braquage  $\delta_c$  est pré-calculé à partir de la connaissance de la trajectoire future, le véhicule étant alors capable de suivre de près la trajectoire désirée.

Les chercheurs de l'université de Santa Catarina au Brésil, abordent la problématique du véhicule inclinable d'un autre point de vue, considérant le système d'inclinaison STC. Le premier contrôleur **(Roquero, Rodrigo, et al. 2010)** est monovariable, avec pour entrée  $\delta$  et pour sortie  $\theta$ . La référence de l'angle d'inclinaison est définie par  $\theta_{ref} = -\tan^{-1}\left(\frac{V_x^2 \delta_{cond}}{g(l_f + l_r)}\right)$ , une version modifiée du choix  $\theta_{ref} = \tan^{-1}(a_{lat} / g)$ .

Les chercheurs proposent un contrôleur proportionnel paramétré de manière affine par la vitesse, de la forme  $K = k_s + k_v V_x$ , avec  $k_s$  et  $k_v$  des constantes non nulles qu'ils estiment. Ensuite, dans **(Roquero et al. 2011; Roquero, Enric, et al. 2010; Roquero & Enric 2010)** les auteurs considèrent un contrôleur multivariable calculant l'angle de braquage  $\delta$  et le couple du moteur de traction  $T_m$  (correspondant à la force  $F_t$ ). Le contrôleur est synthétisé en utilisant la technique des modes glissants. La référence de l'angle d'inclinaison est la même que précédemment, et le modèle de synthèse est constitué de deux équations exprimant la dynamique d'inclinaison et la dynamique longitudinale du véhicule. Les résultats présentés montrent que le véhicule est stabilisé avec un angle d'inclinaison proche de la référence, mais l'accélération latérale perçue et la trajectoire du véhicule ne sont pas représentées.

Finalement, la stratégie DTC proposée par des taiwanais de l'Université de Tung est constitué de deux boucles PID imbriquées, la boucle interne contrôlant la vitesse d'inclinaison ( $\dot{\theta}$ ), et la boucle externe la position angulaire ( $\theta$ ). Les résultats de simulation montrent uniquement l'angle d'inclinaison, sans préciser l'expression de l'angle de référence **(Chiou et al. 2009)**.

## 10. Systèmes DTC et SDTC : synthèse des difficultés et solutions

S'inspirant des ces travaux, nous identifions les problématiques essentielles des systèmes de contrôle proposés, notamment des systèmes DTC et SDTC, et nous proposons des solutions qui chercheraient à améliorer les performances du contrôleur, tout en assurant la robustesse du système.

### 10.1. Synthèse des difficultés ou risques

#### 10.1.1. Difficultés ou risques liés aux stratégies de commandes DTC

Les stratégies DTC se basent de manière générale sur un asservissement de l'angle d'inclinaison  $\theta$ , tel que  $\theta \rightarrow \theta_{ref}$ , où  $\theta_{ref}$  est donné par l'expression (3.10)  $\theta_{ref} = \tan^{-1}(a_{lat} / g)$  ou alors des versions encore plus simplifiées et/ou approximatives qui ont été détaillées au fil du paragraphe 9 ci dessus (i.e.  $\theta_{ref} = V_x \dot{\psi} / g$ , ou  $\theta_{ref} = k_s (\delta_{cond})$  etc.).

Les points faibles de ces stratégies peuvent être résumés comme suit :

- 1- **Sollicitation importante de l'actionneur en phase transitoire** : le calcul en ligne de  $\theta_{ref}$  à partir de la mesure de l'accélération latérale  $a_{lat}$  ou de l'angle de lacet  $\psi$ , induit un retard intrinsèque : l'actionneur n'est sollicité qu'après la détection de l'accélération latérale au travers de l'accéléromètre; le couple d'inclinaison doit dès lors compenser l'accélération latérale déjà présente, inclinant le véhicule vers l'extérieur du virage, avant de pouvoir l'incliner en sens contraire. Plus la réaction  $M_i$  tarde (e.g. à l'amorce d'un virage), plus l'accélération latérale prend des valeurs importantes, et plus le couple d'inclinaison requis est important. Ceci est illustré par la Figure 3. 13. Rappelons que lorsqu'une instrumentation permettant de prévoir la trajectoire est installée sur le véhicule (caméra...), l'anticipation permet de réduire le couple d'inclinaison de manière significative (Piyabongkran D. et al. 2004). De plus, l'accélération latérale ( $a_{lat} = \ddot{y} + v\dot{\psi} \cos \beta$ ) est proportionnelle à la vitesse. Ainsi *plus la vitesse est importante*, plus l'accélération latérale est importante et plus le couple  $M_i$  sollicité est important.

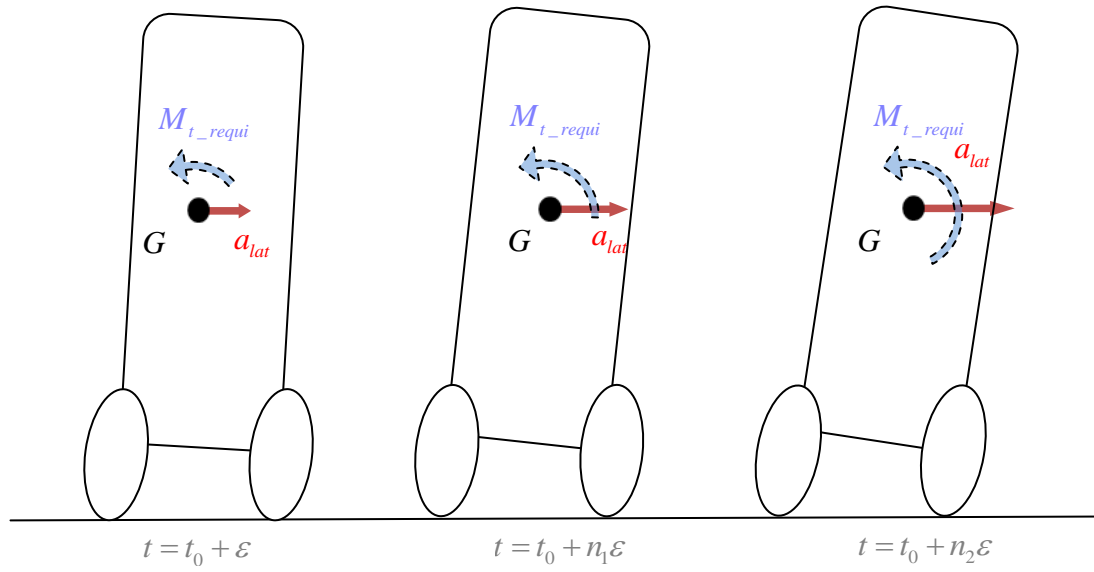


Figure 3.13 : Phase transitoire du véhicule abordant un virage à  $t = t_0$  : accélération latérale croissante, inclinant le véhicule en dehors du virage et nécessitant un couple d'inclinaison  $M_t$  plus important

- 2- **L'erreur statique** : Compte tenu de la manière dont la référence est calculée,  $\theta = \theta_{ref}$  ne signifie pas pour autant que  $a_{per}$  soit strictement nulle. Par conséquent, l'actionneur doit délivrer en permanence un couple non nul pour maintenir l'inclinaison du véhicule à  $\theta_{ref}$  (Figure 3.14), et ce même si  $\theta \in [\theta_n - \Delta\theta_{min}; \theta_n + \Delta\theta_{max}]$ , et que le véhicule ne risque pas le renversement.

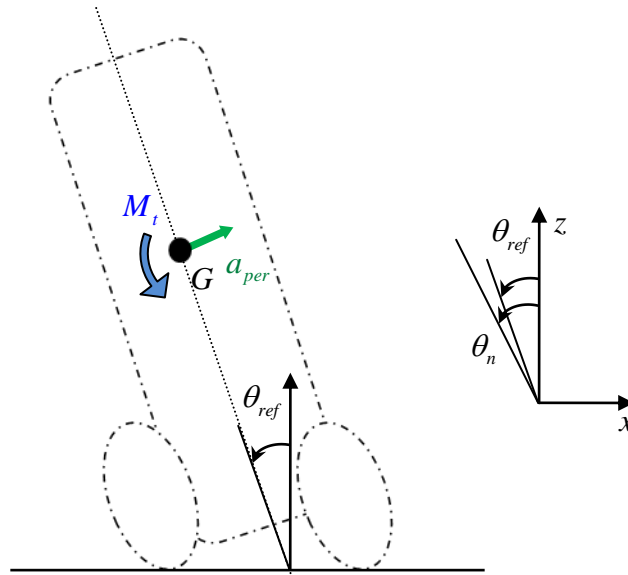


Figure 3.14 : Véhicule stabilisé en une position  $\theta_{ref}$  proche de la position de stabilité nominale  $\theta_n$  - un couple est nécessaire pour maintenir le véhicule dans cette position

### 10.1.2. Difficultés ou risques liés aux stratégies de commandes SDTC

Hormis la complexité liée au système SDTC lui même, les difficultés pour leur contrôle, présentées au paragraphe 8.3, sont principalement relatives aux problèmes de commutation:

1. Signaux de commande antagonistes en phase transitoire,
2. Pics de commande et d'accélération perçue,

Ajoutons également que le système STC doit produire une modification limitée de l'angle de braquage souhaité par le conducteur,  $\delta_{cond}$  pour ne pas s'éloigner de la trajectoire désirée.

Vis-à-vis des difficultés citées ci-dessus, nous proposons les solutions suivantes :

## 10.2. Solutions proposées

Les deux contributions principales de notre travail, pour améliorer l'exploitation des systèmes DTC (utilisable aussi pour les systèmes SDTC) sont les suivantes : **i) utilisation par le régulateur de l'angle de braquage** souhaité par le conducteur (angle du volant), et **ii) contrôle direct de l'accélération latérale perçue**. Le contrôleur DTC correspondant est synthétisé au chapitre 4.

Au-delà, nous proposons pour le contrôle du système SDTC une approche résolument multivariable, pour laquelle **les deux signaux de commande agissent simultanément**. Ce contrôleur sera synthétisé au chapitre 5.

### 1. Réduction du couple d'inclinaison en DTC

En observant la conduite d'un motocycle, on note que le motard s'incline dès l'entrée du virage, avant l'apparition de l'accélération latérale ; par conséquent l'effort nécessaire pour l'inclinaison est relativement petit ; ceci est également le cas pour un véhicule dont on *connaît* la trajectoire à l'avance. Il est ainsi essentiel d'initier l'inclinaison le plus tôt possible. Le premier signal mesurable contenant des informations sur la trajectoire proche est **l'angle** (voire le couple) **de braquage**. Ce signal se doit d'être utilisé afin d'initier l'inclinaison du véhicule avant même la perception de l'accélération latérale  $a_{lat}$ . Ce sera un élément essentiel de la stratégie que nous proposerons.

L'angle de braquage est considéré, du point de vue du contrôle d'inclinaison DTC, comme une perturbation induisant un accroissement, en valeur absolue, de l'accélération latérale perçue, de nature à déstabiliser le véhicule. Pour pouvoir utiliser ce signal dans le contrôleur, nous choisissons une méthodologie de commande, qui permet la prise en compte des connaissances que l'on a quant à l'environnement du système à contrôler. Cette connaissance sera formalisée au travers d'un modèle du signal « angle de braquage ».

## 2. Annulation de l'erreur statique et amélioration des performances en DTC

La stabilité latérale est obtenue par l'inclinaison adéquate du véhicule. Il est dès lors intuitif de chercher à asservir l'angle d'inclinaison  $\theta \rightarrow \theta_{ref}$ , en calculant (approximativement) le couple nécessaire pour réaliser une inclinaison cohérente avec l'objectif terminal :  $a_{per} = 0$ . Pour réduire le problème de l'approximation (cf. paragraphe 10), réduire les risques d'instabilité ( $\theta_{ref}$  est déduit des variables d'état, ce qui constitue un bouclage implicite) et enfin gagner en réactivité, nous proposerons le contrôle direct de l'accélération latérale perçue  $a_{per}$ , dans le sens où l'objectif de commande devient la régulation  $a_{per} = 0$  et non plus l'asservissement  $\theta = \theta_{ref}$ . Nous chercherons aussi, dans un deuxième temps, à assurer l'annulation asymptotique robuste de l'erreur statique, au travers de la prise en compte de  $a_{per}^I$ , l'intégrale de  $a_{per}$ . Cette approche est d'autant plus intéressante que  $a_{per}$  est mesurée par la centrale inertielle. Notons aussi, que le domaine de validité de cette approche n'est pas réduit au cas où le plan de la route est parfaitement horizontal, mais reste valable en présence de dévers *i.e.*  $\eta \neq 0$ .

## 3. Contrôleur SDTC multi-entrées

Dans le but de profiter des avantages des deux contrôleurs dans différentes conditions de circulations, et contourner les problèmes relatifs à la commutation entre les deux systèmes, nous proposons dans le chapitre 5 un **contrôleur multivariable SDTC**, assurant une coordination optimisée des commandes  $M_t$  et  $\delta_c$  afin de réguler l'accélération latérale perçue. La connaissance de l'angle du volant sera également exploitée. Nous verrons que l'action combinée des entrées  $M_t$  et  $\delta_c$  résout non seulement la question difficile de la commutation entre systèmes (cf. section 10.1.2), mais améliore aussi notablement les performances.

# 11. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons explicité le problème de stabilité latérale du véhicule inclinable, et défini les objectifs du contrôleur à concevoir. L'expression de l'accélération latérale a été retrouvée à partir du modèle du véhicule, et deux visions différentes de la stabilité ont été données : le contrôle de l'accélération latérale dite « perçue » au centre de gravité du véhicule (solution explorée dans la suite du mémoire) ou l'étude du transfert de charge au niveau des roues. Les systèmes d'actionnement DTC, STC et SDTC ainsi que leurs caractéristiques comparées ont été présentés. Cette comparaison s'appuie pour partie sur l'état de l'art que nous avons réalisé sur ce thème. Finalement, nous avons précisé les stratégies que nous préconisons et adopterons dans la suite pour la synthèse des régulateurs DTC (chapitre 4) et SDTC (chapitre 5).





### 1. Introduction

La problématique de stabilisation du véhicule inclinable a été largement exposée dans le chapitre précédent. Dans ce chapitre, nous formalisons le problème et lui proposons une solution sous la forme d'un régulateur structuré optimal au sens d'un critère  $H_2$ . Rappelons les deux objectifs principaux de la commande :

1. Maintenir l'accélération latérale perçue  $a_{per}$  en deçà d'un certain seuil, idéalement l'annuler de manière robuste,
2. Maîtriser l'effort de commande, en accord avec les capacités de l'actionneur et de façon à ne pas obérer l'autonomie du véhicule par une dépense énergétique importante.

On se donne par ailleurs, comme éléments du cahier des charges, de privilégier les régulateurs de faible complexité (ordre faible), exploitant au mieux les mesures disponibles.

La démarche méthodologique que nous proposons se décline en trois points :

3. **Configuration du problème** : définition des signaux de commande, mesures, perturbations, références, sorties à contrôler.
4. **Formalisation du problème** de commande au travers d'un problème d'optimisation  $H_2$
5. Recherche du meilleur compromis entre réduction de l'accélération latérale et faible dépense énergétique sur la commande. Les paramètres de réglage sont constitués de pondérations sur ces deux variables et serviront pour la **synthèse d'un régulateur structuré** de faible complexité en exploitant l'ensemble des signaux facilement mesurables.

Il est essentiel de noter que les variables d'états du modèle de conception  $x = (\dot{y}, \dot{\psi}, \theta, \dot{\theta})^T$  ne sont pas toutes disponibles. Précisément, il manque la vitesse latérale  $\dot{y}$ . On peut en revanche supposer mesurée l'accélération latérale perçue,  $a_{per}$ , ainsi que la vitesse de lacet  $\dot{\psi}$ , dont les valeurs sont données par le biais d'une centrale inertielle (gyromètre et accéléromètres couplés), ainsi que  $\theta$  et  $\dot{\theta}$ , mesurés par un capteur sur le dispositif d'inclinaison.

Dans ce qui suit, nous précisons les modalités de mise en œuvre de cette démarche, avant d'évoquer son application sur les systèmes DTC monovariabiles et plus loin les systèmes SDTC multivariables dans le chapitre 5.

## 2. Démarche méthodologique retenue

L'idée générale consiste, partant du cahier des charges et de la connaissance du processus à contrôler et de son environnement, à formaliser le problème au travers de la construction d'un modèle générique, dit standard, permettant la reformulation du problème de commande en un problème d'optimisation  $H_2$ . Ce modèle est structuré, et constitué de l'agrégation de (cf. Figure 4. 1) :

- Un modèle du **système à contrôler**, faisant apparaître en entrée signaux de perturbation et de commande, et en sortie, grandeurs à contrôler/réguler et grandeurs mesurées,
- Un modèle de l'**environnement** du système à contrôler, générant les signaux exogènes tels que perturbations et consignes,
- Un modèle des **grandeurs à réguler**, incluant des pondérations constituant des coefficients de réglage.

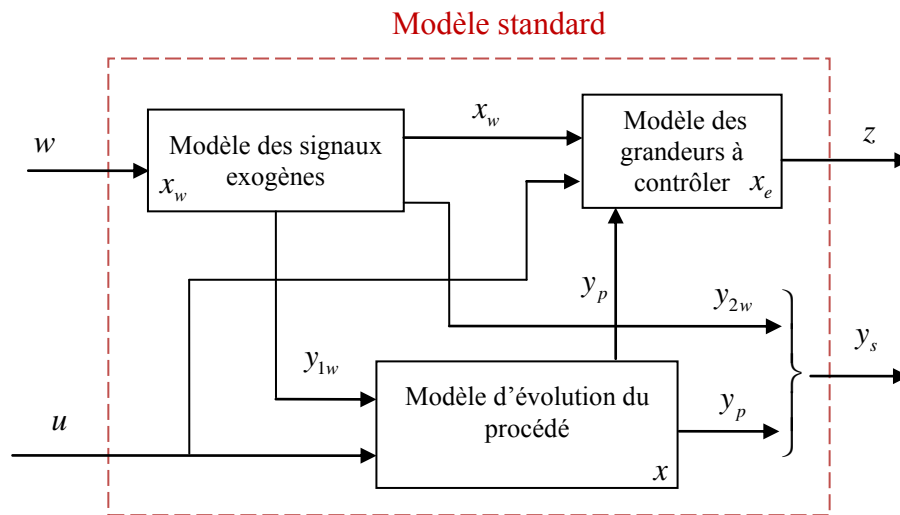


Figure 4. 1 : Construction du modèle standard

Le problème  $H_2$  associé revêt la forme générique (cf. figure 4.2), consistant à déterminer  $K(s)$  stabilisant le modèle du processus et minimisant :  $\|F_l(P(s), K(s))\|_2$ .

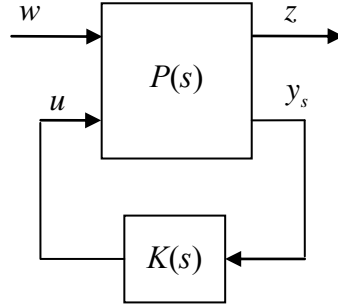


Figure 4. 2 : Problème standard

En résumé, l'idée générale est de ramener un problème de rejet de perturbations et / ou de suivi de consignes en un problème de régulation sur lequel définir un critère à minimiser. S'inspirant des résultats de De Larminat (De Larminat 1996) et Chevrel (Chevrel 2002), la démarche méthodologique permet l'exploitation de l'ensemble des informations disponibles pour obtenir une loi de commande linéaire multivariable « réglable ». Les compromis performance / sollicitation de la commande peuvent être aisément effectués, et la robustesse garantie, *e.g.* par ajout d'une contrainte  $H_\infty$  sur la fonction de sensibilité pour la prise en compte d'incertitudes multiplicatives inverses.

## 2.1. Constitution d'un modèle standard structuré

La construction du modèle standard consiste en :

- La détermination du modèle d'évolution juste nécessaire\* du procédé, *i.e.* modèle du véhicule, sous la forme :

$$(S) \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_w y_{1w} + B_u u \\ y_p = Cx + D_w y_{1w} + D_u u \end{cases} \quad (x \in R^{n_x \times 1}, u \in R^{m \times 1}, y_p \in R^{p \times 1}) \quad (4.1)$$

$x$  étant son état, ce modèle possède des entrées subies  $y_{1w}$  et des entrées de commande  $u$ , et met à disposition en sortie les grandeurs mesurées  $y_p$ .

- La modélisation des signaux exogènes (exosystème), agrégeant les connaissances disponibles *a priori* sur l'environnement du procédé (perturbations et consignes). Soient  $x_d$  et  $x_r$  les états correspondant aux perturbations et aux références respectivement,  $x_w = [x_r \ x_d]^T$ . le modèle de l'exosystème peut s'écrire en fonction de conditions initiales :

$$(S_{rd}) \begin{cases} \dot{x}_w = A_w x_w \\ y_{1w} = C_{1w} x_w \\ y_{2w} = C_{2w} x_w \end{cases} / x_w(0) = x_{w0} = B_w \quad (x_w \in R^{n_{xw} \times 1}, y_{1w} \in R^{p_{1w} \times 1}, y_{2w} \in R^{p_{2w} \times 1}) \quad (4.2)$$

ou alors de façon équivalente en considérant une matrice d'entrée  $B_w$  et un signal irréductible  $w$  :

$$(S_{rd}) \begin{cases} \dot{x}_w = A_w x_w + B_w w \\ y_{1w} = C_{1w} x_w \\ y_{2w} = C_{2w} x_w \end{cases} \quad (x_w \in R^{n_{xw} \times 1}, w \in R^{n_w \times 1}) \quad (4.3)$$

- c. La modélisation des grandeurs à contrôler ; ce modèle est structuré et fait apparaître de manière interne, hormis le vecteur d'état  $x$ , le vecteur des écarts  $e$ , partitionné en  $e_u$  et  $e_y$ . Ces signaux d'écart regroupent les sorties à contrôler/réguler, et doivent ainsi pouvoir être annulés asymptotiquement. Ils peuvent faire intervenir des signaux filtrés du procédé physique. La matrice  $Q_0 \in R^{p_z \times p_e}$  vient pondérer les signaux à réguler afin de permettre la définition du signal de sortie  $z$  qu'il faudra minimiser.

Les signaux contenus dans le vecteur  $z$  sont donc des écarts, auxquels on associe des pondérations statiques ou fréquentielles. Ces écarts sont construits sur la base du calcul d'une trajectoire de référence. Il y a donc passage d'un problème de rejet de perturbation ou de suivi de consigne en un problème de régulation.

$$(S_{gc}) \begin{cases} \dot{x}_e = A_e x_e + \begin{bmatrix} B_{ex} & B_{ew} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_p \\ x_w \end{bmatrix} + B_{eu} u \\ e = \begin{bmatrix} e_y \\ e_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{ey} \\ C_{eu} \end{bmatrix} x_e + \begin{bmatrix} D_{e11} & D_{e12} \\ D_{e21} & D_{e22} \\ D_{ex} & D_{ew} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_p \\ x_w \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} D_{eu1} \\ D_{eu2} \end{bmatrix}}_{D_{eu}} u \\ z = Q_0^{\frac{1}{2}} e \end{cases} \quad (x_e \in R^{n_{xe} \times 1}, e \in R^{p_e \times 1}, z \in R^{p_z \times 1}) \quad (4.4)$$

Combinant les équations (4.1), (4.2) ou (4.3) et (4.4) le modèle standard  $P(s)$  s'écrit :

$$\begin{aligned}
P(s) & \begin{cases} \dot{x}^s = A^s x^s + B_1^s w + B_2^s u \\ z = C_1^s x^s + D_{12}^s u \\ y_s = C_2^s x^s + D_{22}^s u \end{cases} \\
& \Leftrightarrow P(s) \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_e \\ \dot{x}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & B_w C_{1w} \\ B_{ex} & A_e & B_{ew} \\ 0 & 0 & A_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_e \\ x_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_w \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} B_u \\ B_{eu} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ z = Q_0^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} e_y \\ e_u \end{bmatrix} = Q_0^{\frac{1}{2}} \left( \begin{bmatrix} D_{ex} & C_e & D_{ew} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_p \\ x_e \\ x_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{eu} \end{bmatrix} u \right) \\ y_s = \begin{bmatrix} y_p \\ y_{2w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 & D_w C_{1w} \\ 0 & 0 & C_{2w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_e \\ x_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_u \\ 0 \end{bmatrix} u \end{cases} \quad (4.5)
\end{aligned}$$

Ou encore, distinguant les parties commandable et non commandable :

$$\begin{aligned}
P(s) & \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_e \\ \dot{x}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c & B_w C_{1w} \\ 0 & A_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_e \\ x_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_w \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} B_{cu} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ z = Q_0^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} e_y \\ e_u \end{bmatrix} = Q_0^{\frac{1}{2}} \left( \begin{bmatrix} D_{e11} & C_{ey} & D_{e12} \\ D_{e21} & C_{eu} & D_{e22} \\ D_{ex} & C_e & D_{ew} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_p \\ x_e \\ x_w \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} D_{eu1} \\ D_{eu2} \end{bmatrix}}_{D_u} u \right) \\ y_s = \begin{bmatrix} y_p \\ y_{2w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 & D_w C_{1w} \\ 0 & 0 & C_{2w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_e \\ x_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_u \\ 0 \end{bmatrix} u \end{cases} \quad (4.6)
\end{aligned}$$

## 2.2. Synthèse d'un régulateur $H_2$ structuré

Le problème d'optimisation  $H_2$  associé au modèle standard de la Figure 4. 1, consiste à minimiser le transfert  $T_{zw}$ , ou de manière équivalente, à minimiser l'énergie (norme  $L_2$ ) du signal vectoriel  $z$  vis-à-vis de signaux d'entrée  $w_i$  considérés comme irréductibles et normalisés (impulsions unitaires). Ces signaux irréductibles peuvent avoir plusieurs interprétations, tel qu'indiqué dans (Chevrel 2000; Chevrel 2002).

On cherche donc à déterminer le régulateur  $K(s)$  qui minimise  $\|F_l(P(s), K(s))\|_2^2 = \|z(t)\|_2^2$ , tout en assurant la stabilité interne du modèle du processus (4.1) (et non la stabilité interne de tout le modèle standard). Dans le contexte le plus général, lorsqu'aucune contrainte sur la structure du régulateur n'est imposée, il est possible de trouver une solution analytique. Le régulateur

ainsi obtenu est dynamique et plus précisément se présente sous la forme d'un retour d'état associé à un observateur. Hypothèses et solution à ce problème sont disponibles dans (Chevrel 2002; Yagoubi et al. 2007).

Pour notre application nous proposons de contraindre la structure du régulateur, en relation avec la structuration du modèle standard d'une part, et le cahier des charges d'autre part (faible complexité) ; on impose ainsi la forme :

$$u = -K_y y_s - K_e e_y = \underbrace{-K_p y_p - K_e e_y}_{\text{rétroaction}} \underbrace{-K_w y_{2w}}_{\text{précompensation}} \quad (4.7)$$

avec les matrices de gains (statiques) :

$$K_y \in R^{1 \times (p+p_{2w})}, K_e \in R^{1 \times p_{ey}}, K_p \in R^{1 \times p}, K_u \in R^{1 \times p_{2w}}$$

Le régulateur ainsi structuré, ayant pour entrée  $y_s$  et pour sortie  $u$ , est schématisé sur la Figure 4. 3.

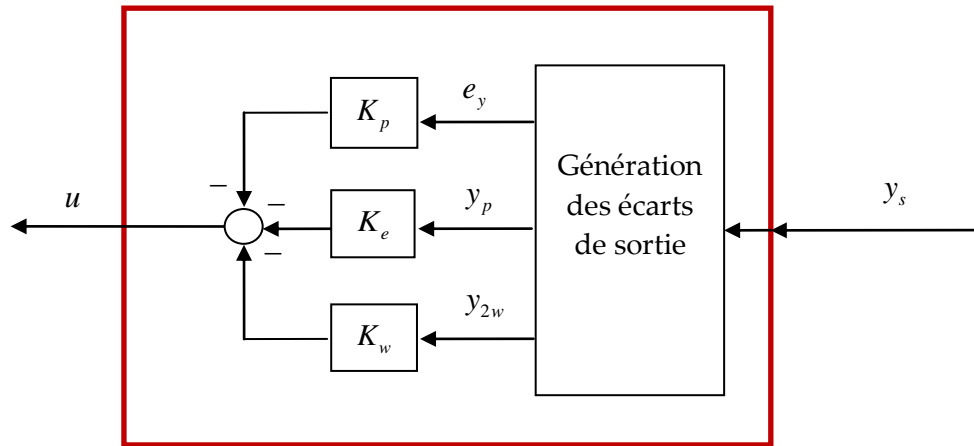


Figure 4. 3 : Architecture du contrôleur structuré

Notons que ce régulateur est d'ordre faible, les seules dynamiques présentes étant issues du modèle des grandeurs à contrôler, intégrées dans le bloc GES pour « génération des écarts de sortie », et qu'il fait apparaître explicitement les écarts à réguler en fonction desquels il ajuste les actions de la commande. Si la Figure 4.3 ne relie pas directement la sortie  $y_p$  à  $y_s$ , c'est que nous voulions symboliser le fait que le bloc GES doit gérer les redondances potentielles entre certains signaux constitutifs de  $y_p$  et de  $e_y$ .

En résumé, le problème de commande que l'on cherchera à résoudre peut se formuler de la manière suivante,

Trouver le régulateur structuré  $K^{st}(s)$  défini par (4.7) et la Figure 4.3 qui assure :

- la minimisation de  $\|F_l(P(s), K(s))\|_2^2 = \|z(t)\|_2^2$ ,
- la stabilité interne du processus physique en boucle fermée.

Soulignons que les hypothèses du problème  $H_2$  sans contrainte sur le régulateur solution (cf. Feng et al.; Chevrel 2002) sont dans ce contexte nécessaires, mais pas forcément suffisantes.

Notons enfin que le critère se réécrit :

$$\|z\|_2^2 = \int_0^{+\infty} e^T(t) Q_0 e(t) dt = \int_0^{+\infty} (e_y^T(t) Q_{11} e_y(t) + 2e_y^T(t) Q_{12} e_u(t) + e_u^T(t) Q_{22} e_u(t)) dt \quad (4.8)$$

Par suite, le choix des matrices  $Q_{11}$ ,  $Q_{12}$  et  $Q_{22}$  permet de gérer les compromis entre performance et sollicitation de la commande, et l'arbitrage entre les objectifs de performance eux mêmes.

### 2.3. Point méthodologique : construction des grandeurs à contrôler

Il peut être délicat de reformuler un problème de rejet de perturbations ou de suivi de consignes en un problème bien posé : toutes les sorties à contrôler  $z$  doivent être choisies de sorte à pouvoir simultanément tendre vers 0. Tel que présenté par la Figure 4.1 et le modèle des grandeurs à contrôler (4.4), une manière de procéder est de construire un modèle aux écarts sur la base de signaux ou de modèles de référence (construction des signaux  $e_y$  et  $e_u$ ). Si le choix des sorties de référence associées aux grandeurs à contrôler est le plus souvent intuitif et directement relié à l'objectif de commande, le choix des entrées de référence (pour la commande) l'est parfois moins. On peut bien sûr procéder par inversion du modèle du processus. La méthodologie retenue ici préfère partir de la description (modélisation) des signaux exogènes (De Larminat 2000), afin de déduire, par résolution d'équations dites d'occultation (Wonham 1985), le vecteur de commandes de référence *ad hoc*. Il s'agit alors, une fois les écarts  $e_y$  définis, de trouver la solution unique  $(T_a, F_a)$  aux équations d'occultation, qui s'écrivent par rapport aux notations du modèle standard à partir de l'équation (4.6):

$$\begin{cases} A_c T_a - T_a A_w + B_{cu} F_a = B_w C_{1w} \\ [D_{e11} \ C_{ey}] T_a + D_{eu1} F_a = D_{e12} \end{cases} \quad (4.9)$$



La solution  $(T_a, F_a) \in R^{(n+n_e) \times n_{wv}} \times R^{m \times n_{wv}}$  à ces équations d'occultation permet la définition des entrées et sorties de référence à partir de l'état du modèle des signaux exogènes.

Précisément, la **trajectoire de référence pour les états et la commande s'écrit** :

$$(u_{ref}, x_{pe\_ref}) = (-F_a x_w, -T_a x_w), \quad (4.10)$$

Les écarts de commande s'écrivent dès lors :

$$e_u = u - u_{ref} = u + F_a x_w \quad (4.11)$$

**Preuve :**

Soit  $(e_u, e_x) = (u - u_{ref}, x_{pe} - x_{ref})$ , avec  $x_{pe} = (x \ x_e)^T$ . On a immédiatement :

$$\begin{bmatrix} x_{pe} \\ x_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_x + x_{ref} \\ x_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -T_a \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ x_w \end{bmatrix} \quad / \quad \begin{bmatrix} e_x \\ x_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & T_a \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{pe} \\ x_w \end{bmatrix}$$

Le système (4.6) devient :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{x}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c & -A_c T_a + T_a A_w + B_w C_{1w} \\ 0 & A_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ x_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{cu} \\ 0 \end{bmatrix} (e_u + u_{ref}) \\ e_y = \begin{bmatrix} D_{e11} & C_{ey} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ x_w \end{bmatrix} + D_{eu} (e_u + u_{ref}) \end{cases} \quad (4.12)$$

Les équations d'occultation (4.9) étant supposées vérifiées, le système s'écrit :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{x}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c & B_{cu} F_a \\ 0 & A_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ x_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{cu} \\ 0 \end{bmatrix} (e_u + u_{ref}) \\ e_y = \begin{bmatrix} D_{e11} & C_{ey} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ x_w \end{bmatrix} + D_{eu1} (e_u + u_{ref}) \end{cases} \quad (4.13)$$

Choissant un retour d'état  $e_u = F_1 e_x$  stabilisant ( $F_1$  tel que  $A_c + B_{cu} F_1$  soit Hurwitz), on obtient :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{x}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c + B_{cu} F_1 & 0 \\ 0 & A_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ x_w \end{bmatrix} \\ e_y = \begin{bmatrix} D_{e11} & C_{ey} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ x_w \end{bmatrix} + D_{eu1} F_1 e_x \end{cases} \quad (4.14)$$

et l'écart  $(e_u, e_x) = (u - u_{ref}, x_{pe} - x_{ref})$ , entre la trajectoire du processus et la trajectoire de référence, tend bien asymptotiquement vers 0 selon les équations :

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= A_c e_x + B_{cu} e_u \\ e_y &= [D_{e11} \ C_{ey}] e_x + D_{eu1} e_u \end{aligned} \quad (4.15)$$

Sur cette base, le problème consiste à trouver le régulateur le plus performant en terme de minimisation de ces écarts, afin de permettre au système un suivi optimisé de sa trajectoire de référence.

## 2.4. Synthèse du régulateur structuré – forme analytique

Compte tenu de la contrainte structurelle liée au régulateur (retour de sortie ayant la structure explicite donnée par l'équation (4.7)), le problème de synthèse relève d'un problème d'optimisation non-convexe, dont aucune solution analytique n'est connue. Toutefois, des algorithmes ont été proposés récemment afin de résoudre ce type de problème (Apkarian et al. 1995; Bouali 2008; Arzelier et al. 2010), dont certains d'entre eux, tel Hifoo (Arzelier et al. 2011; Hifoo), voire Hinfstruct dans le cas d'un critère  $H_\infty$ , sont disponibles dans des boîtes à outils Matlab.

La résolution du problème se trouve grandement simplifiée si la totalité du vecteur d'état du modèle standard (4.5) est supposée connue du régulateur, *i.e.*  $y_s = [x^T \ x_e^T \ x_w^T]^T$ . On se retrouve alors dans le contexte bien connu du problème de synthèse d'un retour d'état  $H_2$ -LQ ((cf. équation (4.7) avec  $y_p = x$ ,  $e_y = x_e$  et  $y_{2w} = x_w$ ), dont la solution analytique est obtenue en résolvant une équation de Riccati (Zhou et al. 1996).

L'application que nous avons à traiter durant cette thèse ne relève pas de cette dernière situation : toutes les variables d'état du véhicule ne sont pas mesurées et nous avons fait appel, dans un premier temps, à des algorithmes d'optimisation non linéaire, et à la conception d'observateurs (Mourad et al. 2011). Nous montrerons cependant, dans le paragraphe 4.2 qu'il est possible, à partir des mesures disponibles dont l'accélération latérale perçue  $a_{per}$ , de reconstruire le vecteur d'état, et ce, sans utiliser d'observateur dynamique.

Sous l'hypothèse donc que toutes les grandeurs d'état sont à chaque instant connues du régulateur, on peut procéder comme suit pour calculer le régulateur.

Le critère (4.8) :

$$\|z\|_2^2 = \int_0^{+\infty} e^T(t) Q_0 e(t) dt = \int_0^{+\infty} (e_y^T(t) Q_{11} e_y(t) + 2e_y^T(t) Q_{12} e_u(t) + e_u^T(t) Q_{22} e_u(t)) dt$$

peut être réécrit selon (cf. équation (4.6)) :

$$\|z\|_2^2 = \int_0^{+\infty} e^T(t) Q_0 e(t) dt = \int_0^{+\infty} ([x_{pe}(t) \ x_w(t)]^T Q_{01} [x_{pe}(t) \ x_w(t)] + 2[x_{pe}(t) \ x_w(t)]^T Q_{02} e_u(t) + e_u^T(t) Q_{03} e_u(t)) dt$$

avec :

$$\begin{cases} Q_{01} = Q_{01}^T \geq 0 \\ Q_{02}^T = Q_{02} > 0 \\ Q_{03} = Q_{03}^T > 0 \end{cases}$$

L'équation de Riccati conduisant à sa minimisation, sous la contrainte d'évolution (4.15) s'écrit :

$$(A^s)^T S + S(A^s) - (SB_2^s + Q_{02})Q_{03}^{-1}((B_2^s)^T S + Q_{02}^T) + Q_{01} = 0 \quad (4.16)$$

La solution  $S$  *ad hoc* conduit :

**à la matrice de gains (statique) de retour d'état:**

$$K_{H2} = Q_{03}^{-1}((B_2^s)^T S + Q_{02}^T) \quad (4.17)$$

**et au signal de commande par retour d'état:**

$$u = -K_{H2} [x_{pe} \quad x_w]^T \quad (4.18)$$

On peut, sous **certaines conditions qui seront précisées ultérieurement** (paragraphe 4.2), **se ramener à la structure souhaitée :**

$$u = -K_p y_p - K_e e_y - K_w y_{2w} \quad (4.19)$$

Dans ce paragraphe nous avons défini la démarche de synthèse du contrôleur ainsi que les contraintes structurelles sur ce dernier. Nous nous intéressons dans le paragraphe suivant aux problématiques des systèmes DTC, pour pouvoir ensuite formuler l'objectif de la commande, définir les éléments du système (4.6) et les grandeurs nécessaires pour l'application de cette démarche et l'obtention du contrôleur.

### 3. Commande des systèmes DTC

Rappelons que les véhicules DTC sont dotés d'un actionneur supplémentaire au niveau de leur axe d'inclinaison horizontal, qui délivre le couple d'inclinaison  $M_i$ . C'est la seule entrée de commande, l'angle de braquage étant déterminé par le conducteur (*cf.* paragraphe 4.1).

Notre réflexion s'appuie sur deux idées clés pour aborder la problématique de conception des systèmes DTC. Comme développé au Chapitre 310.1.2, partant de notre analyse des stratégies rencontrées dans la littérature, qui réalisent l'asservissement de l'angle d'inclinaison, nous proposerons une reformulation du problème de commande en lui apportant deux

contributions essentielles qui conduiront à une démarche conceptuelle systématique et à des performances améliorées.

Ainsi, pour remédier aux problématiques de forte sollicitation de l'actionneur en phase transitoire et de l'erreur statique, nous formulons l'objectif de commande en fonction de l'accélération latérale perçue que nous cherchons à annuler, et nous utilisons la mesure de l'angle de braquage conducteur pour initier l'inclinaison le plus tôt possible.

L'angle de braquage est considéré, du point de vue du contrôle d'inclinaison DTC, comme une perturbation induisant un accroissement, en valeur absolue, de l'accélération latérale/perçue, de nature à déstabiliser le véhicule. Pour pouvoir utiliser ce signal dans le contrôleur, nous choisissons la méthodologie de commande  $H_2$  décrite au paragraphe 2, qui permet la prise en compte des connaissances que l'on a quant à l'environnement du système à contrôler. Cette connaissance est ici formalisée au travers d'un modèle de l'angle de braquage (cf. (4.3)), définissant l'exosystème de la Figure 4. 1.

Compte tenu de ces deux éléments (contrôle direct de  $a_{per}$  et usage de la mesure de  $\delta$  dans le contrôleur), nous appliquerons ci-après la démarche méthodologique décrite au paragraphe 2, pour synthétiser le contrôleur d'inclinaison (DTC). La démarche sera reprise au chapitre 5 pour concevoir le régulateur combiné (SDTC). Précisons en préambule (paragraphe 4) les éléments supports et hypothèses en termes de modèle et de grandeurs mesurées.

#### **4. Véhicules inclinables : le modèle d'évolution du procédé et les mesures et signaux disponibles**

Dans la première partie de ce paragraphe, nous nous intéressons à définir le modèle physique d'évolution du procédé, et ses entrées/sorties. Dans un second temps, nous expliciterons les signaux (mesurés ou reconstruits) disponibles pour la synthèse du régulateur.

#### 4.1. Modèle de l'évolution du procédé pour la synthèse DTC et SDTC

Rappelons d'abord l'équation d'état du modèle linéarisé du véhicule (cf. équation 2.22)

$$\begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} (-\frac{a}{mV_x} - \frac{h^2 a}{I_x V_x}) & (-\frac{b}{mV_x} - V_x - \frac{h^2 b}{I_x V_x}) & 2(\lambda_f + \lambda_r)(\frac{1}{m} + \frac{h^2}{I_x}) - \frac{mgh^2}{I_x} & 0 \\ (-\frac{b}{I_z V_x}) & -\frac{2(C_f l_f^2 + C_r l_r^2)}{I_z V_x} & \frac{2(\lambda_f l_f - \lambda_r l_r)}{I_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{ha}{I_x V_x} & \frac{hb}{I_x V_x} & \frac{mgh - 2h(\lambda_f + \lambda_r)}{I_x} & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\psi} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2C_f(\frac{1}{m} + \frac{h^2}{I_x}) \\ 2C_f l_f \\ 0 \\ -2C_f h \end{bmatrix}}_{B_\delta} \delta + \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{h}{I_x} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I_x} \end{bmatrix}}_{B_M} M_t + \underbrace{\begin{bmatrix} g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_\eta} \eta$$

$$y_p = Cx + D_\delta \delta + D_M M_t + D_\eta \eta$$

$$a = 2(C_f + C_r), b = 2(C_f l_f - C_r l_r), c = 2(\lambda_f + \lambda_r), B = [B_\delta \quad B_M]. \quad (4.20)$$

Ce modèle peut servir de modèle conceptuel pour l'évolution du procédé pour le système SDTC aussi bien que DTC, pour autant que l'on distingue convenablement les signaux de commande.  $\eta$  est dans tous les cas une entrée de perturbation matérialisant l'angle de dévers de la route. Ce signal n'est pas mesuré et sera négligé pour la phase de conception.

##### 4.1.1. Les grandeurs de sorties mesurées – systèmes DTC et SDTC

Le vecteur de sortie  $y_p$  représente les grandeurs mesurées. Le véhicule est doté d'une centrale inertielle, capable de donner, après filtrage, les mesures de l'accélération latérale perçue  $a_{per}$  au niveau du véhicule ainsi que les vitesses de roulis lacet et tangage. D'autre part, la position angulaire  $\theta$  et sa dérivée  $\dot{\theta}$  sont mesurées par un capteur sur le dispositif d'inclinaison. Parmi les variables d'état, seules  $(\dot{\psi}, \theta, \dot{\theta})$  sont disponibles ;  $\dot{y}$  ne constitue pas une entrée du régulateur. Le vecteur  $y_p = (\dot{\psi}, \theta, \dot{\theta}, a_{per})$  regroupe les variables exploitables *a priori* par le régulateur DTC ou SDTC.

Nous cherchons maintenant à exprimer les matrices  $C$ ,  $D_\delta$ ,  $D_M$  et  $D_\eta$  exprimant  $y_p$  en fonction des états et des entrées (équation (4.20)). Les trois premières grandeurs de  $y_p$  étant des variables d'état, leur expression est directe dans la matrice  $C$  ; la grandeur  $a_{per}$  s'exprime quant à elle en fonction des états et entrées du système :

Partons de l'expression de l'accélération latérale perçue (3.7) :

$$a_{per} = (\ddot{y} + V_x \dot{\psi}) \cos \theta + h \ddot{\theta} - g \sin \theta$$

et linéarisons la aux petits angles :

$$a_{per}^{lin} = \ddot{y} + V_x \dot{\psi} + h \ddot{\theta} - g \theta$$

$$\begin{aligned}
a_{per}^{lin} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & V_x & -g & 0 \end{bmatrix}}_{G_1} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & h \end{bmatrix}}_{G_2} \dot{x} \\
a_{per}^{lin} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & V_x & -g & 0 \end{bmatrix}}_{G_1} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & h \end{bmatrix}}_{G_2} (Ax + B_\delta \delta + B_M M_t) \\
a_{per}^{lin} &= G_1 x + G_2 (Ax + B_\delta \delta + B_M M_t) \\
&= Gx + H_\delta \delta + H_M M_t
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Finalement pour  $\eta = 0$  le vecteur de sortie  $y_p$  est défini tel que :

$$y_p = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & G & \end{bmatrix}}_C x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ H_\delta \end{bmatrix}}_{D_\delta} \delta + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ H_M \end{bmatrix}}_{D_M} M_t \tag{4.22}$$

Définissons à présent les entrées du modèle du procédé dans les cas d'un système DTC, en identifiant les signaux physiques avec ceux définis dans le modèle standard de la Figure 4. 1 (et Figure 4. 4).

#### 4.1.2. Entrées du modèle de l'évolution du procédé – système DTC

Dans le cas d'un système DTC,  $M_t$  est la seule entrée de commande ;  $\delta$  l'angle de braquage appliqué aux roues avant par le conducteur, est considéré comme une perturbation qui créera une accélération latérale qu'il convient de limiter.

Identifions à partir de ce qui précède les signaux d'entrée  $u$  et  $y_{1w}$ , du modèle d'évolution du procédé (cf. Figure 4. 1 et Figure 4. 5):

$$\rightarrow u = M_t$$

$$\rightarrow y_{1w} = \delta$$

On déduit aisément de ce qui précède les matrices  $A, B_w = B_\delta, B_u = B_M, C, D_w = D_\delta, D_u = D_M$ , définissant le modèle (cf. équation(4.5)).

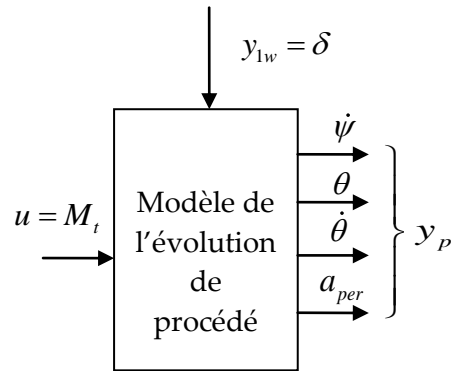


Figure 4. 4 : Entrées/ sorties du procédé

#### 4.1.3. Entrées du modèle de l'évolution du procédé – système SDTC

Dans le cas d'un système SDTC, on choisit de décomposer le signal  $\delta$  selon  $\delta = \delta_r + \delta_{cond}$ , où  $\delta_{cond}$  est l'angle de braquage imposé par le conducteur, et  $\delta_r$  le braquage additionnel introduit par le système STC.  $\delta_r$  et  $M_t$  constituent ainsi les deux entrées de commande associées au système SDTC. L'identification complète des signaux sera faite dans le chapitre 5, qui sera concerné par la stratégie de commande SDTC.

#### 4.2. Régulation par retour de sortie : mesures et grandeurs disponibles

Comme nous l'avons déjà précisé (cf. équation (4.22)), le vecteur  $y_p = (\dot{\psi}, \theta, \dot{\theta}, a_{per})$  regroupe les variables exploitables *a priori* par le régulateur DTC ou SDTC. Sous ces conditions, et pour répondre à la contrainte structurelle du contrôleur optimal (cf. équation (4.7)), nous avons cité au paragraphe 2.4 deux alternatives possibles pour la résolution du problème:

- 1/ Utiliser les algorithmes d'optimisation non linéaire pour déterminer le retour statique optimal, en utilisant notamment Hifoo ou Hinfstruct que proposent les boîtes à outils Matlab (cf. paragraphe 2.4). L'inconvénient majeur de ce choix est que ces outils nécessitent une initialisation, et donc l'utilisateur doit avoir une idée approximative des gains de contrôle, au risque d'avoir un résultat correspondant à un optimum local et non global que pourrait retrouver les algorithmes d'optimisation.
- 2/ Dans l'objectif d'utiliser un contrôleur à retour d'état, il est possible d'utiliser un observateur réduit, qui permettra de construire  $\hat{y}$ , valeur estimée de  $y$ . L'observateur doit être conçu de sorte à conserver le transfert de boucle (Loop Transfer Recovery) : ne pas modifier les caractéristiques de la boucle fermée, et limiter les retards dans la transmission des signaux. Ce genre d'observateurs a été développé dans (Mourad et al. 2011). Notons que l'observateur est dynamique, il augmentera alors l'ordre du système.

3/ Nous proposons pour la suite une troisième alternative, qui sera possible dans le cas de notre application vu les **interdépendances entres les grandeurs mesurées**. En effet, il est possible de déterminer la valeur instantanée de  $\dot{y}$  à partir des mesures disponibles d'où la proposition suivante :

**Proposition :**

On peut estimer  $\dot{y}$  à partir des valeurs des paramètres du véhicule et des mesures  $(a_{per}, \dot{\psi}, \theta, \dot{\theta})$  disponibles, selon la relation statique :

$$\dot{y} = (a_{11} + ha_{41})^{-1} [a_{per}^{lin} - (a_{12} + ha_{42} + V_x)\dot{\psi} - (a_{13} + ha_{43} - g)\theta - (a_{14} + ha_{44})\dot{\theta} - (b_{d1} + hb_{d4})\delta - (b_{u1} + hb_{u4})M_t] \quad (4.23)$$

où les paramètres  $a_i$  et  $b_i$  sont des paramètres du modèle (4.20)

**Preuve :**

Partons de l'expression de l'accélération latérale perçue linéarisée aux petits angles :

$$a_{per}^{lin} = \ddot{y} + V_x \dot{\psi} + h\ddot{\theta} - g\theta$$

Nous pouvons dans (4.20) exprimer  $\ddot{y}$  et  $\ddot{\theta}$  à partir des variables d'état et d'entrée, en dérivant les équations d'évolution du système et les coefficients  $a_{ij}$  et  $b_{ij}$  sont obtenus par identification:

$$\begin{cases} \ddot{y} = a_{11}\dot{y} + a_{12}\dot{\psi} + a_{13}\theta + a_{14}\dot{\theta} + b_{d1}\delta + b_{u1}M_t \\ \ddot{\theta} = a_{41}\dot{y} + a_{42}\dot{\psi} + a_{43}\theta + a_{44}\dot{\theta} + b_{d4}\delta + b_{u4}M_t \end{cases}$$

Ainsi, l'expression de  $a_{per}^{lin}$  dans se réécrit:

$$\begin{aligned} a_{per}^{lin} &= a_{11}\dot{y} + a_{12}\dot{\psi} + a_{13}\theta + a_{14}\dot{\theta} + b_{d1}\delta + b_{u1}M_t \\ &\quad + h(a_{41}\dot{y} + a_{42}\dot{\psi} + a_{43}\theta + a_{44}\dot{\theta} + b_{d4}\delta + b_{u4}M_t) \\ &\quad + V_x \dot{\psi} - g\theta \\ a_{per}^{lin} &= (a_{11} + ha_{41})\dot{y} + (a_{12} + ha_{42} + V_x)\dot{\psi} + (a_{13} + ha_{43} - g)\theta \\ &\quad + (a_{14} + ha_{44})\dot{\theta} + (b_{d1} + hb_{d4})\delta + (b_{u1} + hb_{u4})M_t \end{aligned}$$

Cette équation permet de déduire  $a_{per}^{lin}$  à partir des paramètres du véhicule et des mesures disponibles  $(a_{per}^{lin}, \dot{\psi}, \theta, \dot{\theta})$ , selon la relation statique :

$$\dot{y} = (a_{11} + ha_{41})^{-1} [a_{per}^{lin} - (a_{12} + ha_{42} + V_x)\dot{\psi} - (a_{13} + ha_{43} - g)\theta - (a_{14} + ha_{44})\dot{\theta} - (b_{d1} + hb_{d4})\delta - (b_{u1} + hb_{u4})M_t]$$



On notera que cette estimation utilise  $a_{per}$  en lieu et place de  $a_{per}^{lin}$ .

**Ayant la mesure de  $\dot{y}$ , nous avons donc reconstruire les états et transformer le problème de synthèse de régulateur  $H_2$  par retour de sortie, en un problème de synthèse optimale par retour d'état.**

La résolution de ce nouveau problème est bien plus intéressante, puisqu'elle garantit l'optimalité du régulateur  $H_2$  obtenu.

Le gain statique de retour d'état obtenu par la résolution du problème du modèle standard décrit par l'équation (4.5), est donné par l'équation (4.17) de la forme  $K_{H_2} = [K_x \ K_{x_e} \ K_{x_w}]$ , avec  $K_x = [K_{\dot{y}x} \ K_{\dot{\psi}x} \ K_{\theta x} \ K_{\dot{\theta}x}]$ . En utilisant la relation (4.23), la partie du signal de commande relative à  $\dot{y}$ , s'écrit :

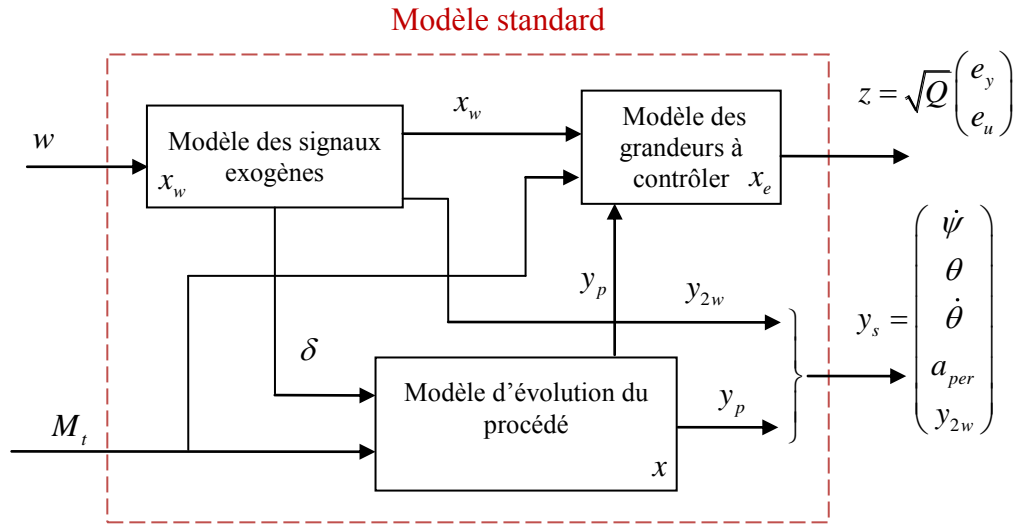
$$K_{\dot{y}x}\dot{y} = K_{\dot{y}x}(a_{11} + ha_{41})^{-1} [a_{per} - (a_{12} + ha_{42} + V)\dot{\psi} - (a_{13} + ha_{43} - g)\theta - (a_{14} + ha_{44})\dot{\theta} - (b_{d1} + hb_{d4})\delta - (b_{u1} + hb_{u4})M_t]$$

A partir de cette expression, en remplaçant  $K_{\dot{y}x}\dot{y}$  par son équivalent à droite de l'égalité, nous déduisons aisément les gains du contrôleur répondant aux contraintes structurelles imposées par (4.7) :  $u = -R_{H_2}y_s = -K_p y_p - K_e e_y - K_w y_{2w}$ .

La structure du régulateur, la démarche méthodologique, le contexte du problème, le modèle du procédé étant bien défini, le paragraphe suivant présente l'application pour la synthèse du contrôleur d'inclinaison.

## 5. Synthèse de régulateurs d'accélération latérale

La synthèse du contrôleur se déroulera selon les étapes méthodologiques présentées aux paragraphes 1 et 2. Nous commencerons par la configuration du problème, la définition du modèle standard, et finalement le réglage des pondérations et synthèse du contrôleur. Les résultats seront reportés au paragraphe 6. Nous reportons ci dessous, pour la commodité de la lecture la Figure 4. 1 du modèle standard, sur laquelle nous avons mentionné les signaux déjà définis par rapport au modèle d'évolution du procédé.



**Figure 4. 1 (copie) : Construction du modèle standard**

#### 5.1.1. Configuration du problème

- **Signaux de commande** : couple d'inclinaison  $M_t$ , d'où  $u = M_t$ .
- **Mesures disponibles** : vitesse de lacet  $\dot{\psi}$ , angle et vitesse angulaire d'inclinaison  $\theta$  et  $\dot{\theta}$ , accélération perçue  $a_{per}$ , angle voire vitesse angulaire de braquage du conducteur  $\delta$  (et  $\dot{\delta}$ ).
- **Sorties à contrôler et références associées**: L'objectif principal est d'annuler l'accélération latérale perçue, au moins en basses fréquences ; on fera ainsi intervenir selon les cas, en plus de  $a_{per}$ , l'accélération filtrée par un passe bas,  $a_{per}^f$ , ou intégrée,  $a_{per}^I$ . Dans tous ces cas, l'annulation de ces quantités est souhaitée. Le second objectif consiste à utiliser parcimonieusement le couple d'inclinaison  $M_t$ , afin de réduire la dépense énergétique du système DTC. Le couple de référence cohérent avec l'objectif de régulation peut être déduit de l'état du modèle des signaux exogènes selon :  $M_{t-ref} = u_{ref} = -F_a x_w$  (cf. Chapitre 42.3)
- **Perturbations mesurées / à rejeter** : L'angle de braquage  $\delta$  est le signal qui permet au véhicule de prendre les virages et induit une accélération latérale. De ce fait il est considéré comme une perturbation dont l'incidence sur l'accélération perçue est à rejeter.
- **Perturbations non mesurées** : ce sont les perturbations relatives aux irrégularités de la chaussée, le dévers de la route  $\eta$ , ou encore les rafales de vents. Non mesurables, elles ne sont pas prises explicitement en compte lors de la conception du régulateur, mais leur effet sur le véhicule sera étudié.

### 5.1.2. Définition du modèle standard

Le modèle standard est constitué du modèle d'évolution du procédé à contrôler (le véhicule), du modèle des signaux exogènes, et du modèle des grandeurs à contrôler.

Le modèle du procédé a été défini au paragraphe 4.1. La Figure 4. 4 résume les entrées/sorties de ce bloc. Reste alors à définir le modèle des signaux exogènes et des grandeurs à contrôler.

#### 5.1.2.1 Définition du modèle des signaux exogènes

De manière générale, cet exosystème modélise les signaux de consigne et de perturbation. Dans le cas présent, il s'agit d'annuler la valeur de l'accélération latérale perçue, et par conséquent, la consigne est nulle et ne requiert pas de modèle. En revanche, nous l'avons dit, l'utilisation de l'angle de braquage est essentielle, ce qui rend sa modélisation nécessaire. Nous considérons dans la suite deux modèles du signal  $\delta$ , de complexités différentes (1<sup>er</sup> et 2<sup>nd</sup> ordre).

Notons que la stabilité de ces modèles n'est pas une exigence du point de vue du problème d'optimisation considéré (problème  $H_2$  étendu).

##### a- Modèle de $\delta$ du 1<sup>er</sup> ordre

L'angle de braquage est modélisé par un échelon (cf. Figure 4. 5), formalisé au travers du modèle (cf. équation (4.3)):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\delta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \delta + \begin{bmatrix} x_{w0} \end{bmatrix} w \\ \dot{x}_w &= A_w x_w + B_{rw} w \\ y_{1w} &= x_w = \delta \\ y_{2w} &= x_w = \delta \end{aligned} \quad (4.24)$$

La fonction de transfert associée est :

$$\delta(s) = \frac{x_{w0}}{s} W(s) \quad / \quad W(s) \text{ signal irréductible (impulsionnel)}$$

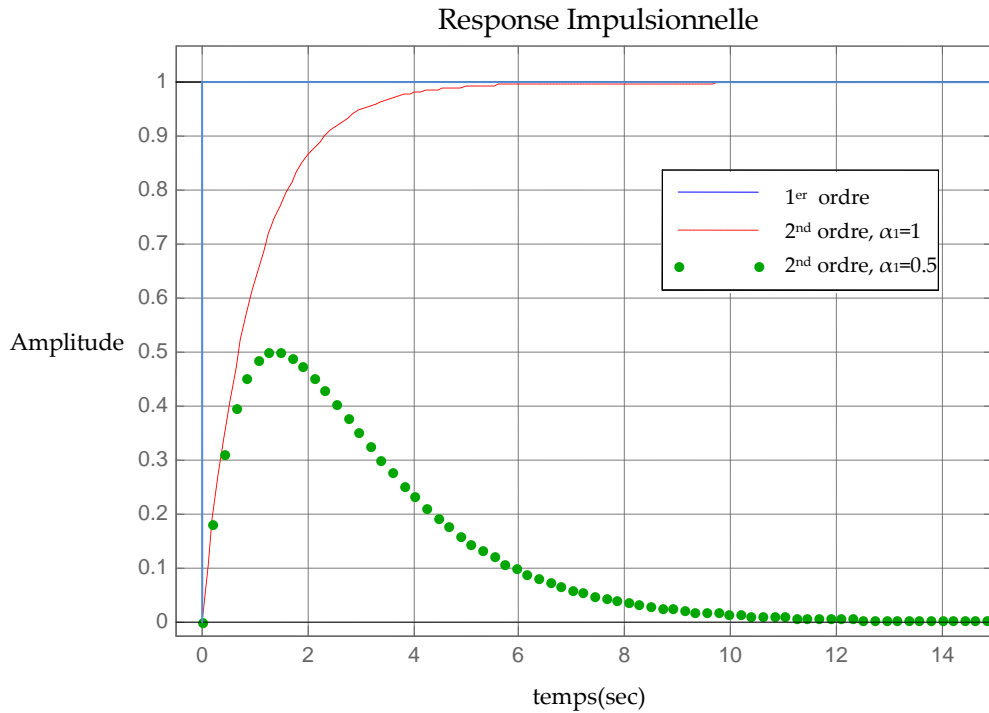
##### b- Modèle de $\delta$ du 2<sup>nd</sup> ordre

Le modèle du 2<sup>nd</sup> ordre ci-dessous (cf. l'équation (4.3)) représente de façon plus réaliste l'angle de braquage type (cf. Figure 4. 5) :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{\delta} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_1\alpha_2 & -(\alpha_1 + \alpha_2) \end{bmatrix}}_{A_w} \begin{bmatrix} \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ x_{w0} \end{bmatrix}}_{B_w} \\
\dot{x}_w & \\
y_{1w} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C_{1w}} \begin{bmatrix} \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} = \delta \\
y_{2w} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C_{2w}} \begin{bmatrix} \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

La fonction de transfert s'écrit :

$$\delta(s) = \frac{x_{w0}}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)} W(s) \quad / \quad W(s) \text{ signal irréductible (impulsionnel)}.$$



**Figure 4.5 :** Allure type de  $\delta(t)$  ; modèles du 1<sup>er</sup> et 2<sup>nd</sup> ordre, avec  $x_{w0}=1, \alpha_2=1$

*Remarque :* en utilisant un modèle du 2<sup>nd</sup> ordre, nous introduisons le signal  $\dot{\delta}$  dans  $y_{2w}$ , supposé mesuré et donc utilisable par le régulateur. Nous renforçons ainsi les capacités de prédiction de la loi de commande. Cet aspect sera développé plus longuement dans le paragraphe 6.2.2.2.

### 5.1.2.2 Définition du modèle des grandeurs à contrôler

Il s'agit de construire le vecteur  $e$  des écarts à annuler, dont la forme est décrite dans l'équation (4.4), que nous rappelons :

$$(S_{gc}) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_e = A_e x_e + \begin{bmatrix} B_{ex} & B_{ew} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_p \\ x_w \end{bmatrix} + B_{eu} u \\ e = \begin{bmatrix} e_y \\ e_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{ey} \\ C_{eu} \end{bmatrix} x_e + \begin{bmatrix} D_{e11} & D_{e12} \\ D_{e21} & D_{e22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_p \\ x_w \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} D_{eu1} \\ D_{eu2} \end{bmatrix}}_{D_u} u \\ z = Q_0^{\frac{1}{2}} e \end{array} \right. \quad (4.26)$$

Le vecteur  $e$  est constitué des écarts vis-à-vis de la trajectoire de référence  $(u_{ref}, x_{pe\_ref}) = (-F_a x_w, -T_a x_w)$ , (cf. équation (4.10)) en sortie  $e_y$ , et en entrée  $e_u$ .

$e_u$  est l'écart entre la commande et la commande de référence :  $e_u = u - u_{ref} = u + F_a x_w$  et  $e_y$  exprime l'objectif premier (afin d'assurer la stabilité latérale et le confort des passagers) et consiste à minimiser l'accélération latérale perçue, au travers de l'un des indicateurs suivants :

- l'accélération latérale perçue elle-même :  $a_{per}$  (cf. paragraphe 6.2)
- l'accélération latérale perçue filtrée :  $a_{per}^f$  (cf. paragraphe 6.3)
- l'intégrale de l'accélération latérale perçue :  $a_{per}^I$  (cf. paragraphe 6.3)

#### 1. Minimisation de $a_{per}$ :

Dans ce cas, le modèle des grandeurs à contrôler,  $(S_{gc})$ , est statique : (cf. équation (4.4)) ;  $e_y$  est directement déduit de l'équation (4.21) :

$$a_{per} = Gx + H_\delta \delta + H_M M_t$$

D'où  $(S_{gc})$  s'écrit :

$$(S_{gc}) \left\{ \begin{array}{l} e = \begin{bmatrix} e_y \\ e_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{per} \\ M_t - M_{t-ref} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{e11} & 0 \\ 0 & F_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_p \\ x_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ z = Q_0^{\frac{1}{2}} e = Q_0^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} a_{per} & e_u \end{bmatrix}^T \end{array} \right. \quad \text{avec } D_{e11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$(e \in R^2, z \in R^2)$

#### 2. Minimisation de $a_{per}$ filtrée : $a_{per}^f$

La mesure de  $a_{per}$  est souvent bruitée, et peut contenir des variations brusques (dues aux imperfections de la route, bruits de mesure,...) qui induiraient des réactions inadaptées de la

part du régulateur. Pour rendre la commande moins sensible aux bruits de mesure (meilleur confort induit par la focalisation sur les fréquences ressenties par le conducteur) et robustifier le système face aux incertitudes paramétriques agissant dans la bande passante, nous proposons d'ajouter un filtre sur la mesure de  $a_{per}$ . Le filtre utilisé est un filtre passe-bas de Butterworth du 2<sup>nd</sup> ordre, avec pour fréquence de coupure  $f_c = 0.1 \text{ Hz}$  :

$$H_f(s) = \frac{a_{per}^f}{a_{per}} = \frac{\omega_c^2}{s^2 + \omega_c \sqrt{2}s + \omega_c^2} \quad \Leftrightarrow \quad , \omega_c = 2\pi f_c \quad (4.28)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{a}_{per}^f \\ \ddot{a}_{per}^f \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_c^2 & -\omega_c \sqrt{2} \end{bmatrix}}_{A_e} \begin{bmatrix} a_{per}^f \\ \dot{a}_{per}^f \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \omega_c^2 \end{bmatrix}}_{B_e} a_{per}$$

Par suite, le modèle dynamique des grandeurs à contrôler (4.4) est donné par :

$$(S_{gc}) \begin{cases} \dot{x}_e = \begin{bmatrix} \dot{a}_{per}^f \\ \ddot{a}_{per}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_c^2 & -\omega_c \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{per}^f \\ \dot{a}_{per}^f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ D_{e11} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_p \\ x_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ e_y = a_{per}^f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{per}^f \\ \dot{a}_{per}^f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_p \\ x_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \\ e_u = M_t - u_{ref} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{per}^f \\ \dot{a}_{per}^f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & F_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_p \\ x_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} u \\ z = Q_0^{\frac{1}{2}} e = Q_0^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} a_{per}^f \\ e_u \end{bmatrix}^T \end{cases} \quad (4.29)$$

$(x_e \in R^2, e \in R^2, z \in R^2)$

### 3. Minimisation de l'intégrale de $a_{per}$ : $a_{per}^I$

La grandeur à contrôler est obtenue cette fois par intégration de  $a_{per}$ . Or  $\dot{a}_{per}^I = a_{per}$ , par suite, le modèle dynamique  $(S_{gc})$  des grandeurs à contrôler (4.4) est donné par :

$$(S_{gc}) \begin{cases} \dot{x}_e = \dot{a}_{per}^I = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} x_e + \begin{bmatrix} D_{e11} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_p \\ x_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \\ e = \begin{bmatrix} e_y \\ e_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_e + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_p \\ x_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ z = Q_0^{\frac{1}{2}} e = Q_0^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} a_{per}^I \\ e_u \end{bmatrix}^T \end{cases} \quad (4.30)$$

$(x_e \in R^1, e \in R^2, z \in R^2)$

### 5.1.3. Réglage des pondérations et synthèse du contrôleur

Le problème étant formalisé, nous cherchons dans cette dernière étape à régler les pondérations contenues dans la matrice  $Q_0$ , de sorte à assurer le meilleur compromis entre réduction de l'accélération latérale et faible dépense énergétique sur la commande.

Quelque soit le choix retenu précédemment pour  $(S_{gc})$ ,  $e \in R^2$  (cf. équations (4.27), (4.29) ou (4.30)), et la matrice  $Q_0$  s'écrit  $Q_0 = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$ , avec  $Q$  et  $R$  scalaires. Leurs valeurs seront présentées et argumentées dans la partie résultats.

Nous avons jusque là renseigné complètement le modèle standard permettant de définir le problème de commande. La suite du chapitre présente les résultats obtenus en termes de performances, mais aussi en termes de robustesse des régulateurs ainsi synthétisés. En dernier, une adaptation par rapport à la variation de la vitesse longitudinale est proposée au travers de l'interpolation de régulateurs conçus à différentes vitesses.

## 6. Stratégies de commande DTC – Résultats

### 6.1. Scénario de simulation

Le scénario que nous proposons pour vérifier les performances du contrôleur correspond à une trajectoire rectiligne jusqu'à  $t = 2s$ , circulaire ensuite (Figure 4. 6). L'angle de braquage est illustré par la Figure 4. 7; à  $t = 2s$  sa valeur passe de 0 à  $0.27 \text{ rad}$  soit  $15.5 \text{ deg}$  (en valeur absolue). La vitesse longitudinale reste constante à  $V_x = 8 \text{ m/s}$ . Ce scénario a ceci d'intéressant qu'il contient une phase transitoire entre 2 et 9 secondes, suivie par une phase stationnaire (en terme d'inclinaison) pendant laquelle le véhicule adopte une trajectoire circulaire du type « rond point ».

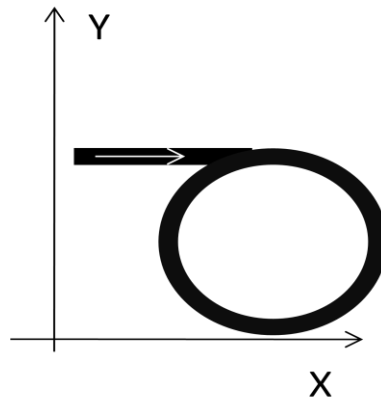


Figure 4. 6: Trajectoire du véhicule dans le plan (XY) de la route

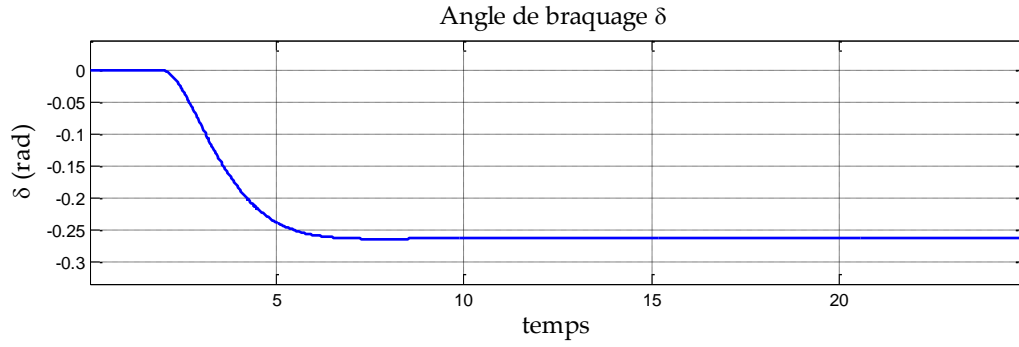


Figure 4.7 : Angle de braquage

Compte tenu de la vitesse  $V_x = 8m/s$ , des paramètres du véhicule et du glissement latéral, la trajectoire à partir de  $t = 2s$  correspond à un cercle de rayon de  $r \approx 23m$  et une accélération latérale  $a_{lat} = 2.5m/s^2$ . Notons que ce scénario représente des conditions difficiles par comparaison aux scénarios représentés dans la littérature, notamment dans (Piyabongkran et al. 2004) où les auteurs considèrent un rayon de courbure de  $500m$ , ou dans (Hibbard & Karnopp 1996), où l'accélération latérale considérée est de  $a_{lat} = 0.1m/s^2$  uniquement.

## 6.2. Contrôle de l'accélération perçue, avec modèles prédicteurs du 1<sup>er</sup> et 2<sup>nd</sup> ordre - Régulateurs 1 et 2

L'objectif de cette partie se décline en deux points :

1. Vérifier l'efficacité des régulateurs d'accélération proposés.
2. Vérifier l'intérêt de l'utilisation, par le régulateur, du signal de braquage  $\delta$ , voire de sa dérivée, ceci en fonction de l'ordre du modèle retenu.

### 6.2.1. Construction des régulateurs structurés

Pour cela, nous construisons deux modèles standards structurés  $P_1(s)$  et  $P_2(s)$ , comportant :

- le modèle du procédé décrit dans le paragraphe 4.1,
- $P_1(s)$  contient le modèle de l'exosystème d'ordre 1 et  $P_2(s)$  le modèle de l'exosystème du 2<sup>nd</sup> ordre (paragraphe 5.1.2.1),
- Les grandeurs à contrôler décrites par l'équation (4.27), puisque nous cherchons à annuler l'accélération latérale perçue, avec  $z = Q_0^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} a_{per} & e_u \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \sqrt{Q} a_{per} & \sqrt{R} e_u \end{bmatrix}^T$ .



Le choix des deux pondérations  $Q$  et  $R$  permet le réglage du compromis performance / sollicitation de l'actionneur. Le choix normalisé  $R=1$  (pas de perte de généralité) permet le réglage par le choix de la seule valeur  $Q \in \{Q=8 \times 10^3, Q=8 \times 10^4, Q=8 \times 10^5\}$ .

**Note :** La pondération  $Q$  sur  $a_{per}$ , est beaucoup plus importante que la pondération  $R$  sur  $e_u$ , ceci car la régulation dynamique de  $a_{per}$  est l'objectif premier, et aussi pour tenir compte du fait que  $a_{per}$  et  $M_t$  sont d'ordre de grandeur différent ( $M_t \approx 50N.m, a_{per} \approx 0.1m/s^2$ ).

**Remarque :**

**Régulateur 1 :**  $y_{2w} = \delta$ , par conséquent la partie  $K_y y_{2w}$  du signal de commande s'écrit  $u_\delta = K_\delta \delta$ ,

**Régulateur 2 :**  $y_{2w} = [\delta \ \dot{\delta}]^T$ , par conséquent la partie  $K_y y_{2w}$  du signal de commande s'écrit  $u_\delta = K_\delta \delta + K_{\dot{\delta}} \dot{\delta}$ ,

Par conséquent, **l'aspect prédictif par rapport virage est renforcé dans le Régulateur 2** ; ceci contribue à l'obtention de meilleures performances comme le montreront les simulations (cf. Figure 4. 12).

Le signal de commande délivré par le **Régulateur 1** s'écrit :

$$u_1 = -R^{(1)} y_s = -\underbrace{K_{a_{per}}^{(1)} a_{per} - K_{\dot{\psi}}^{(1)} \dot{\psi} - K_{\theta}^{(1)} \theta - K_{\dot{\theta}}^{(1)} \dot{\theta}}_{\text{rétro-action}} - \underbrace{K_{\delta}^{(1)} \delta}_{\text{pré-compensation}}$$

Tandis que celui délivré par le **Régulateur 2** est donné par:

$$u_2 = -R^{(2)} y_s = -\underbrace{K_{a_{per}}^{(2)} a_{per} - K_{\dot{\psi}}^{(2)} \dot{\psi} - K_{\theta}^{(2)} \theta - K_{\dot{\theta}}^{(2)} \dot{\theta}}_{\text{rétro-action}} - \underbrace{K_{\delta}^{(2)} \delta - K_{\dot{\delta}}^{(2)} \dot{\delta}}_{\text{pré-compensation}}$$

## 6.2.2. Résultats de simulation :

### 6.2.2.1 Résultats des simulations sur les modèles linéaire et non linéaire, avec Régulateur 1.

Nous réalisons les 1<sup>eres</sup> simulations sur le **modèle linéaire** (cf. équation 2.22) de synthèse, couplé avec le **Régulateur 1**, dans le but de montrer que l'objectif est atteint, *i.e.*  $a_{per} = 0$ , (Figure 4. 8). L'accélération perçue est nulle en régime statique, et ceci simultanément avec un couple d'inclinaison nul. Le véhicule est en position de stabilité nominale en trajectoire circulaire, par l'inclinaison de l'angle  $\theta = \theta_n$  assurant  $a_{per} = 0$ .

Nous réalisons ensuite les simulations sur le **modèle non linéaire** (cf. équation (2.9)), toujours couplé avec le **Régulateur 1**. Les résultats sont présentés sur les Figure 4. 9 à Figure 4. 11.

Les résultats de ces simulations montrent que l'objectif qui est d'annuler l'accélération latérale est parfaitement atteint en simulant le modèle linéaire. Par contre, lorsque le modèle non linéaire est utilisé, la valeur de  $a_{per}$  ne tend pas strictement vers zéro, ceci à cause des écarts de modèle (Figure 4. 9). Nous améliorerons ce point dans le paragraphe suivant.

Sur la base de ces résultats, nous voulons fixer les valeurs des pondérations  $Q$  et  $R$  pour la suite. Le Tableau 4. 1 résume les marges de robustesse en entrée, de gain, phase, retard et module. Les résultats du tableau et des simulations mettent en évidence le compromis performances / robustesse. Une plus grande pondération  $Q$  réduit simultanément la valeur maximale du couple fourni par l'actionneur et la valeur de l'erreur statique sur  $a_{per}$  ; ceci au prix d'une marge de retard dégradée.

**On retiendra par la suite les pondérations  $R=1$  et  $Q=8 \times 10^4$ , qui réalisent un bon compromis.**

S'ensuit une comparaison des résultats des **régulateurs 1 et 2**, avec ces pondérations (Figure 4. 12 et Figure 4. 13).

#### 6.2.2.2 Résultats des simulations sur le modèle non linéaire comparant les performances des régulateurs 1 et 2.

Les Figure 4. 12 et Figure 4. 13 représentent les performances obtenues avec les **régulateurs 1 et 2**. Les marges de robustesse sont indépendantes du modèle retenu pour l'angle de braquage, et correspondent à celles du Tableau 4. 1 pour  $Q=8 \times 10^4$ .

Ces figures montrent l'importance de l'usage du signal de braquage  $\delta$ , et de la qualité de sa modélisation (qui permet une prédiction plus ou moins performante). Il apparaît clairement dans les résultats (transitoire de l'angle d'inclinaison) que le modèle d'ordre 2 permet une anticipation plus grande et de meilleure qualité (Figure 4. 12), ramenant l'accélération perçue de -1 à -0.35 m/s<sup>2</sup>, soit une diminution de 65%. L'actionneur est alors moins sollicité et le couple maximum requis réduit de 56%, (de -160N/m à -70N/m).

$Q / R=1$	Marge de gain en diminution	Marge de phase (deg)	Marge de retard (sec)	Marge de module
$8 \times 10^3$	0.4645	64.6	0.1792	1
$8 \times 10^4$	0.3256	93.8	0.1492	1
$8 \times 10^5$	0.1087	109.9	0.0128	1

Tableau 4. 1 : Marges de robustesse des régulateurs 1, 2 pour différentes pondérations

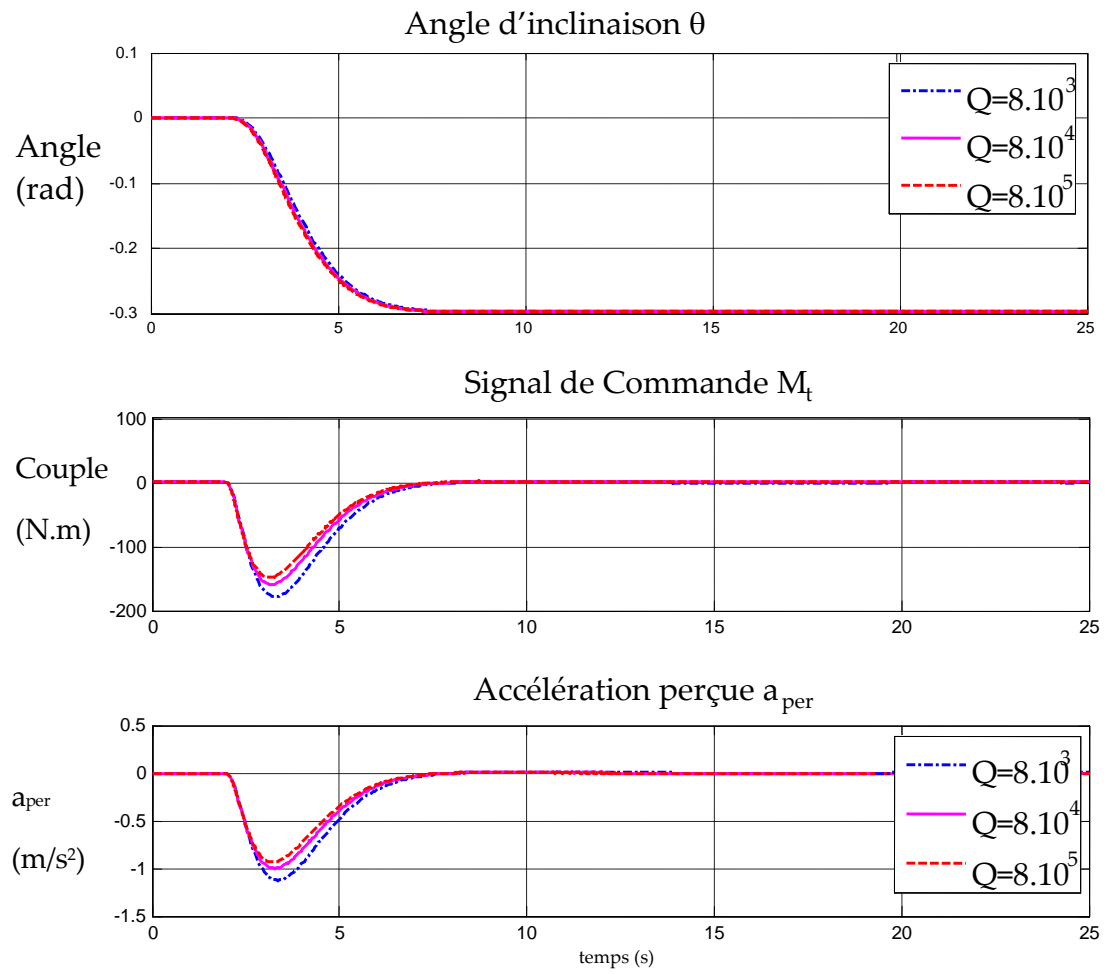
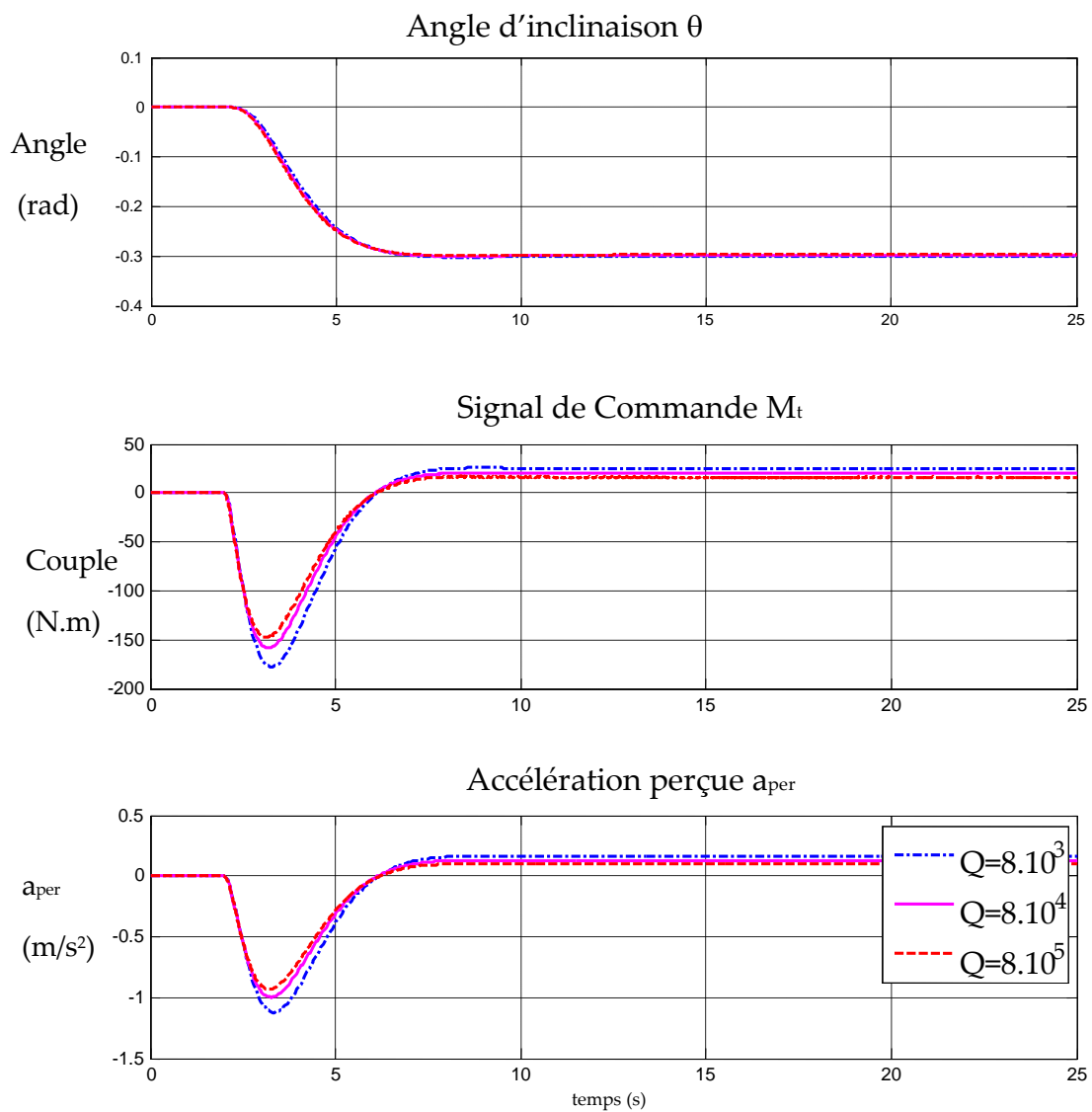


Figure 4. 8 : Angle d'inclinaison du véhicule, signal de commande et accélération perçue résultant de la simulation du MODELE LINEAIRE et Régulateur 1



**Figure 4. 9 : Angle d'inclinaison du véhicule, signal de commande et accélération perçue résultant de la simulation du MODELE NON LINEAIRE et Régulateur 1**

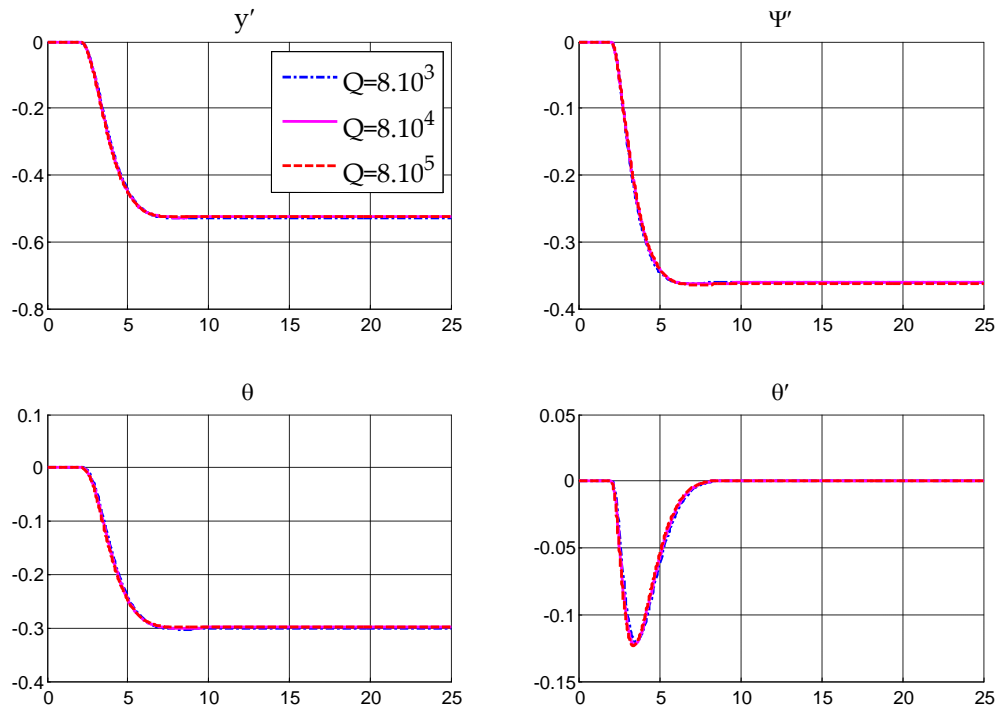


Figure 4. 10 : valeurs des états du système- simulation du MODELE NON LINEAIRE et Régulateur 1

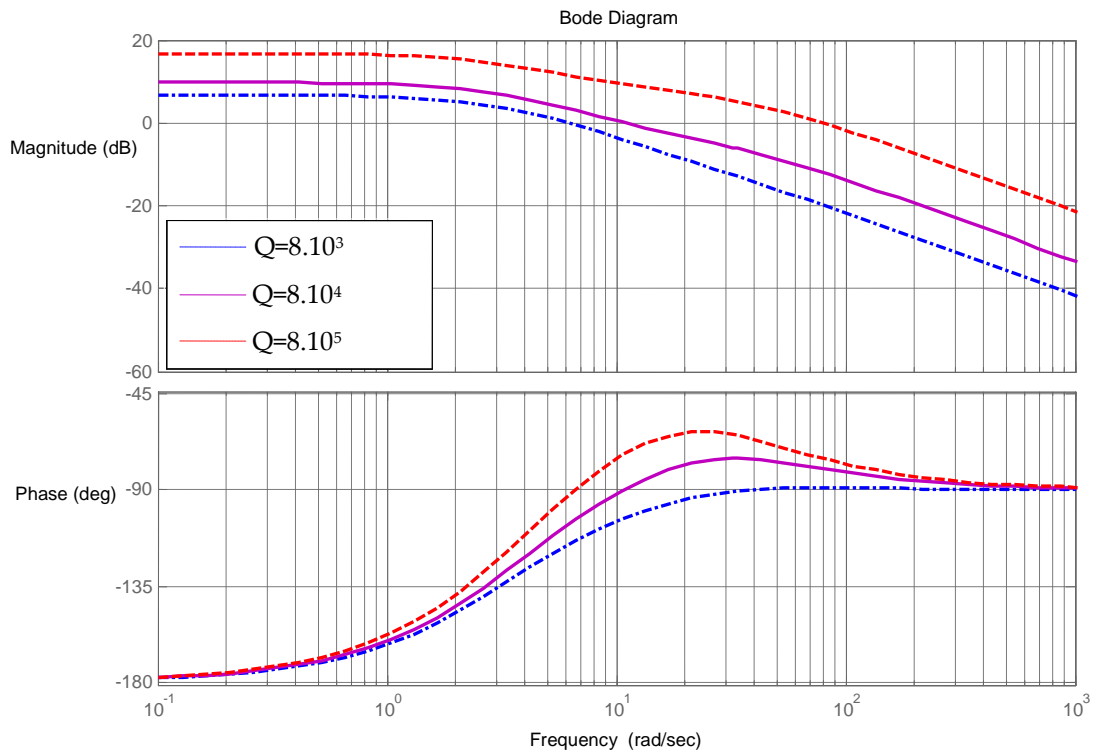


Figure 4. 11 : Tracé de Bode du système en boucle ouverte (rétroaction positive)

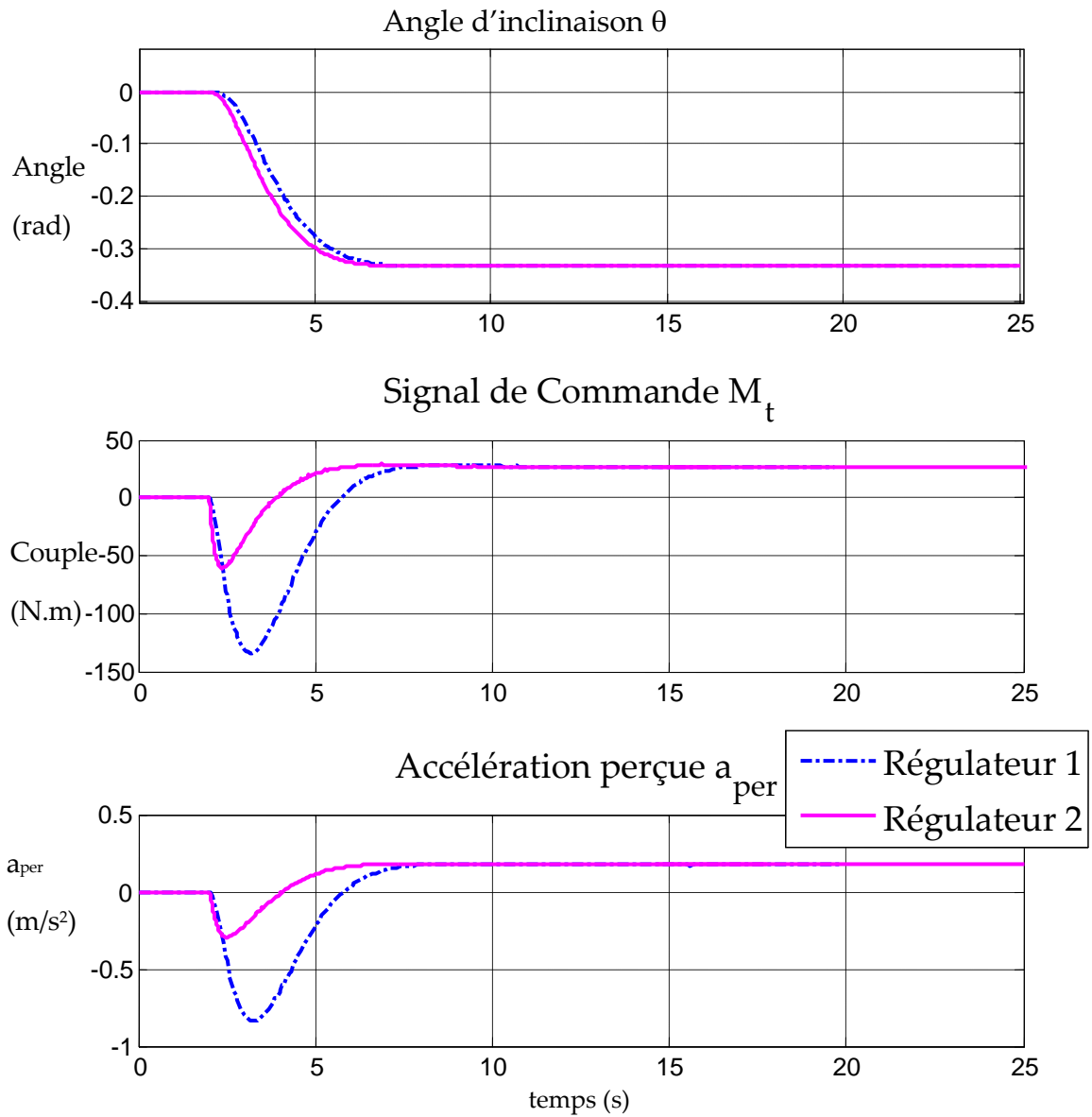


Figure 4. 12 : Angle d'inclinaison du véhicule, signal de commande et accélération perçue résultant de la simulation du modèle non linéaire, avec un modèle prédicteur de l'angle de braquage du 1<sup>er</sup> et du 2<sup>nd</sup> ordre,  $Q=8.10^4$

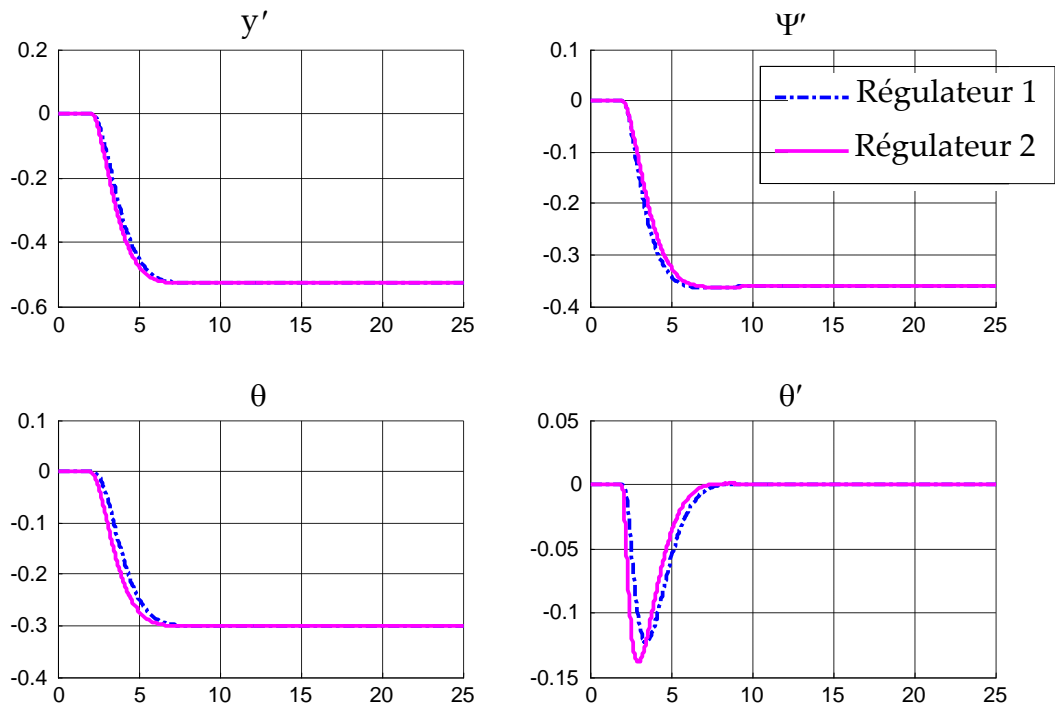


Figure 4. 13 : Valeurs des variables d'état du véhicule avec un modèle prédictif de l'angle de braquage du 1<sup>er</sup> et du 2<sup>nd</sup> ordre,  $R=1$ ,  $Q=8.10^4$ .

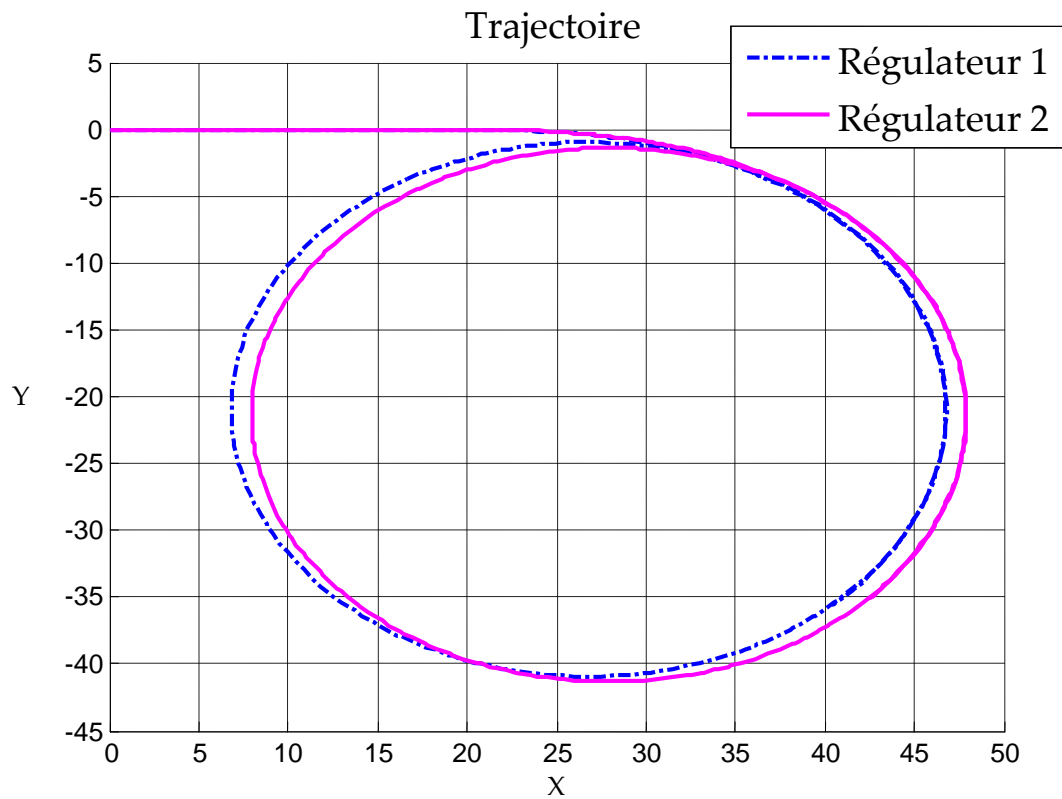


Figure 4. 14 : Impact de l'angle d'inclinaison sur la trajectoire du véhicule.

### 6.3. Régulation de l'accélération latérale perçue filtrée ou intégrée -

#### Régulateurs 3 et 4

La modélisation de l'angle de braquage et l'utilisation de sa mesure a permis d'améliorer significativement le comportement transitoire du système ; reste le problème de l'erreur statique, sur trajectoire circulaire notamment. Nous proposons pour le traiter de focaliser l'action du régulateur DTC en basse fréquence, en filtrant l'accélération latérale perçue par un filtre passe-bas de butterworth d'ordre 2 (cf. paragraphe 5.1.2.2- 2) dont on réglerait la bande passante. Le régulateur dynamique résultant est lui-même d'ordre 2 (**régulateur 3**). Nous verrons que ce filtre atténue significativement l'erreur statique sans l'annuler complètement. Nous proposons également de focaliser prioritairement sur la composante continue de  $a_{per}$ , en cherchant à réguler  $a_{per}^I$  (cf. paragraphe 5.1.2.2- 3). Le **régulateur 4** qui en résulte annule l'erreur statique et ce avec des marges de robustesse proches de celles du régulateur 3. Les deux régulateurs répondent au cahier des charges, et le choix entre l'un et l'autre dépendra des préférences du spécificateur.

La première partie de ce paragraphe présentera l'application de la démarche de synthèse des deux régulateurs structurés, tandis que les résultats comparés seront détaillés ensuite.

#### 6.3.1. Construction des régulateurs structurés

Nous construisons deux modèles standard structurés  $P_3(s)$  et  $P_4(s)$ , comportant :

- le modèle du procédé décrit dans le paragraphe 4.1,
- le modèle des signaux exogènes du 2<sup>nd</sup> ordre (paragraphe 5.1.2.1),
- Les grandeurs à contrôler de  $P_3(s)$  sont celles décrites par l'équation (4.29) :

$$z_3 = Q_0^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} a_{per}^f & e_u \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \sqrt{Q_3} a_{per}^f & \sqrt{R_3} e_u \end{bmatrix}^T, \text{ tandis que celles de } P_4(s) \text{ sont décrites par}$$

$$\text{l'équation (4.30) : } z_4 = Q_0^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} a_{per}^I & e_u \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \sqrt{Q_4} a_{per}^I & \sqrt{R_4} e_u \end{bmatrix}^T.$$

La valeur du scalaire  $R$  est fixée à 1,  $R_3 = R_4 = 1$ , et les paramètres  $Q_3$  et  $Q_4$  sont choisis de sorte à avoir les meilleures performances sous contrainte de robustesse:  $Q_3 = 4 \times 10^7$  et  $Q_4 = 1 \times 10^6$  mènent à des marges de robustesse comparables pour les deux régulateurs.

Le signal de commande à la sortie du **Régulateur 3** s'écrit :

$$u_3 = -R^{(3)} y_s = -\underbrace{K_{a_{per}}^{(3)} a_{per} - K_{\dot{\psi}}^{(3)} \dot{\psi} - K_{\theta}^{(3)} \theta - K_{\dot{\theta}}^{(3)} \dot{\theta} - K_{a_{per}^f}^{(3)} a_{per}^f - K_{\dot{a}_{per}^f}^{(3)} \dot{a}_{per}^f}_{\text{rétro-action}} - \underbrace{K_{\delta}^{(3)} K - K_{\dot{\delta}}^{(3)} \dot{\delta}}_{\text{pré-compensation}}$$

Et du **régulateur 4** :



$$u_1 = -R^{(4)} y_s = \underbrace{-K_{a_{per}}^{(4)} a_{per} - K_{\dot{\psi}}^{(4)} \dot{\psi} - K_{\theta}^{(4)} \theta - K_{\dot{\theta}}^{(4)} \dot{\theta} - K_{a_{per}^I}^{(4)} a_{per}^I}_{\text{rétro-action}} \underbrace{- K_{\delta}^{(4)} \delta - K_{\dot{\delta}}^{(4)} \dot{\delta}}_{\text{pré-compensation}} \quad (4.31)$$

$a_{per}^f$ ,  $\dot{a}_{per}^f$  et  $a_{per}^I$  sont reconstruits dans la partie *génération des écarts de sortie* du régulateur (cf. Figure 4. 3).

### 6.3.2. Résultats de simulation

Nous considérons le scénario présenté dans le paragraphe 6.1. Pour la commodité du comparatif, les figures illustrent simultanément les résultats obtenus avec les **régulateurs 3, 4**, mais aussi **2**.

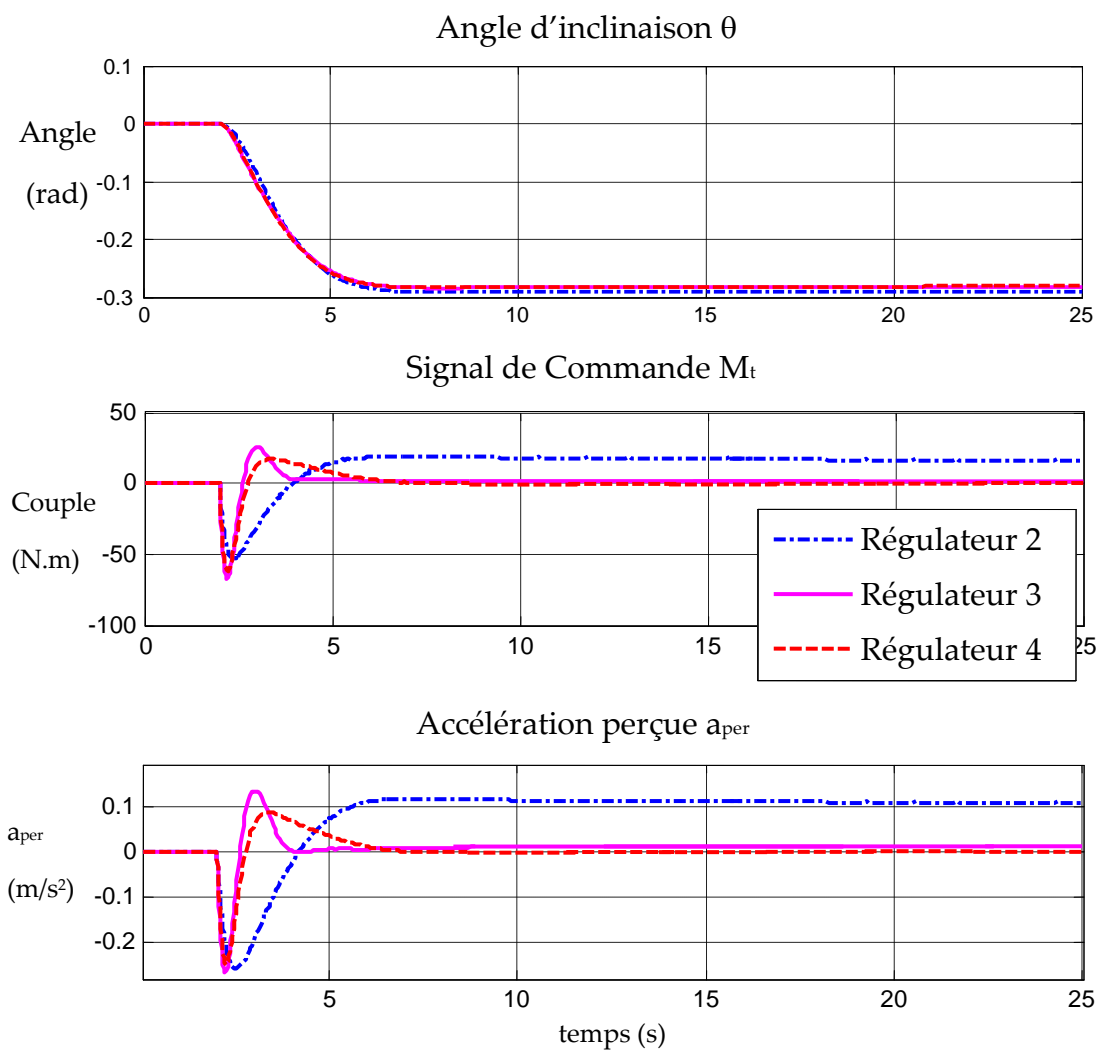
La Figure 4. 15 montre que les **régulateurs 3** et **4**, pour une valeur maximale de  $a_{per}$  et de  $M_t$ , identique à celle obtenue avec le **régulateur 2**, traitent mieux le cas de la trajectoire circulaire. Le **régulateur 3** (minimisation de l'accélération filtrée), atténue fortement l'erreur statique sur l'accélération latérale perçue tandis que le **régulateur 4** l'annule. Les marges de robustesse du Tableau 4. 2 indiquent une robustesse voisine de ces deux **régulateurs 3** et **4**. Resteraient   vérifier leur performances vis-à-vis d'autres conditions de circulation (e.g. chaussée présentant un dévers  $\eta$ ), ou leur robustesse vis-à-vis d'erreurs de modèle plus ciblées.

Le **régulateur 4** donne au système en boucle fermée de bonnes marges de robustesse ainsi que de bonnes performances. Il sera notre **régulateur référence** pour la stratégie de commande DTC.

Ses caractéristiques actuelles sont limitées cependant au fonctionnement du véhicule à vitesse constante et à paramètres constants. Or, différents paramètres du véhicule sont susceptibles de varier (e.g. masse transportée), de même que la vitesse longitudinale. Nous analysons en premier lieu la robustesse de la commande vis-à-vis de la variation de masse, en utilisant les outils de la  $\mu$ -analyse. Nous construirons ensuite un régulateur LPV dépendant de la vitesse.

	$Q$ ( $R = 1$ )	Marge de gain (Valeurs réelles)	Marge de phase (deg)	Marge de retard (sec)	Marge de module
Régulateur 2	$8 \times 10^4$	0.3256	93.8	0.1492	1
Régulateur 3	$4 \times 10^7$	0.3119	60.2	0.1018	1
Régulateur 4	$1 \times 10^6$	0.3005	63.7	0.1127	1

Tableau 4. 2 : Marges de robustesse des régulateurs



**Figure 4. 15 :** Angle d'inclinaison du véhicule, signal de commande et accélération perçue résultant de la simulation du modèle NL, à  $V_x=8\text{m/s}$ .

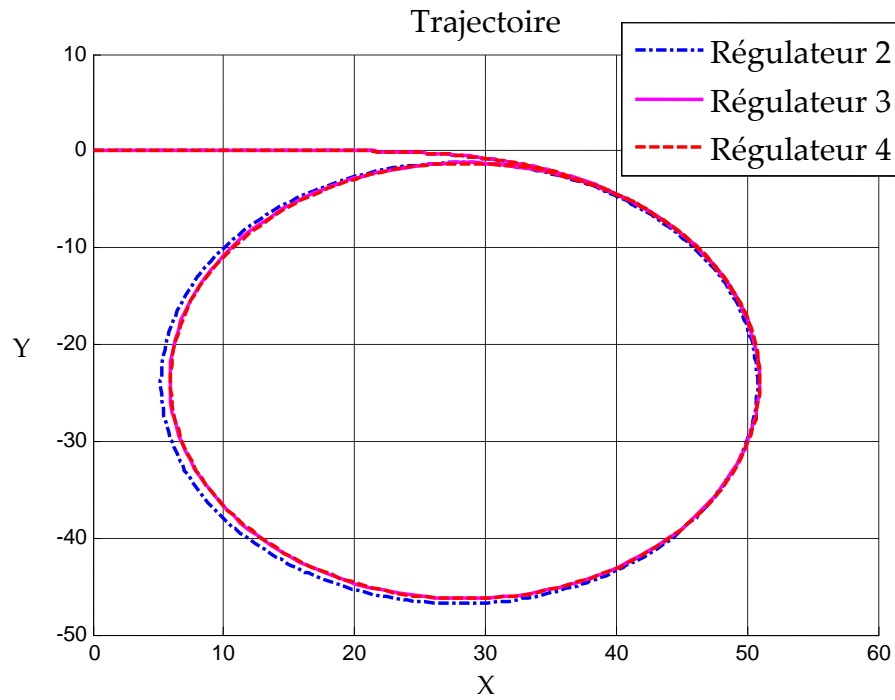


Figure 4. 16 : Trajectoire du véhicule

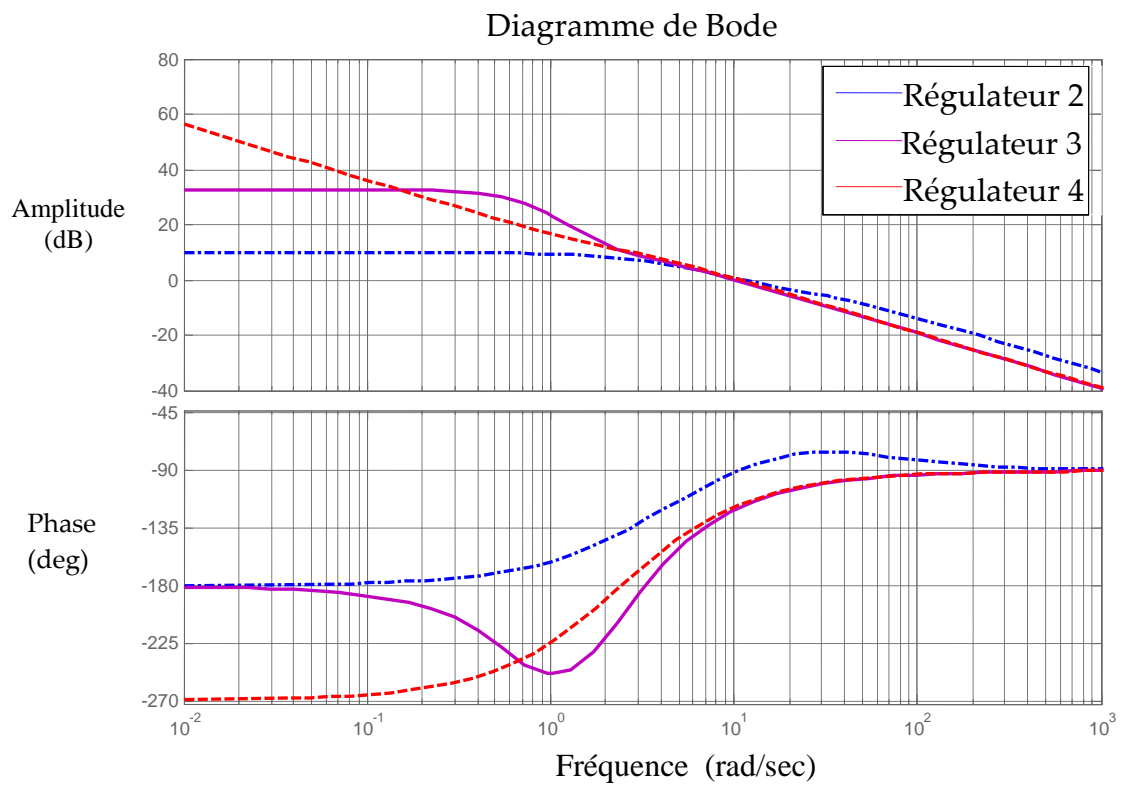


Figure 4. 17 : Tracé de bode du système avec régulateur en boucle ouverte - rétroaction positive.

## 7. $\mu$ -analyse - Robustesse de la commande vis-à-vis de la variation de la masse

De manière générale, la  $\mu$ -analyse permet d'effectuer *a posteriori* des études de robustesse très fines par rapport aux variations paramétriques du modèle, ou aux dynamiques négligées, **prenant en compte la structure et la nature des incertitudes**.

L'analyse se conduit à partir d'une Représentation Linéaire Fractionnaire (LFR s'appuyant sur la manipulation de LFT) du système et du calcul de la valeur singulière structurée  $\mu$ . Ensuite la robustesse se déduit du théorème du faible  $\mu$ . Sans approfondir les détails théoriques, nous donnerons dans ce paragraphe un bref aperçu des outils supports de la  $\mu$ -analyse.

### 7.1. Représentation LFR- (Linear Fractional Representation)

La représentation LFR permettra dans le cas présent de décomposer le système en parties certaine et incertaine, la partie incertaine matérialisant notamment l'incertitude sur la masse transportée.

#### 7.1.1. LFR- Définition générale

Une représentation générale du système soumis à des incertitudes du modèle est donnée sur la Figure 4. 18. Cette figure représente dans notre cas le système en boucle fermée, c'est à dire le véhicule muni de son système DTC. Toutes les incertitudes sont rassemblées dans la matrice  $\Delta(s)$  tandis que  $H(s)$  modélise les interconnexions entre les entrées  $w$  et les sorties  $y_h$  d'un côté, les signaux  $v$  et  $z_h$  qui permettent de faire intervenir les incertitudes.

La forme la plus générale de  $\Delta(s)$ , comportant les variations paramétriques du modèle, les dynamiques négligées et aussi les incertitudes conjointes sur le gain et la phase, s'écrit :

$$\Delta(s) = \text{diag} \left\{ \underbrace{\Delta_1(s), \dots, \Delta_q(s)}_{\text{incertitudes paramétriques}}, \underbrace{\delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_r I_{r_r}}_{\text{dynamiques négligées}}, \underbrace{\varepsilon_1 I_{c_1}, \dots, \varepsilon_e I_{e_e}}_{\text{incertitudes conjointes gain/phase}} \right\}$$

$$\Delta_i(s) \in RH_\infty \quad ; \quad \delta_i \in R \quad ; \quad \varepsilon_i \in C$$

Dans le cas de perturbations normalisées, les conditions suivantes doivent être satisfaites:

$$(\|\Delta_i(s)\|_\infty < 1 \quad ; \quad \delta_i \in ]-1; +1[ \quad ; \quad |\varepsilon_i| < 1) \Leftrightarrow (\|\Delta(s)\|_\infty < 1)$$

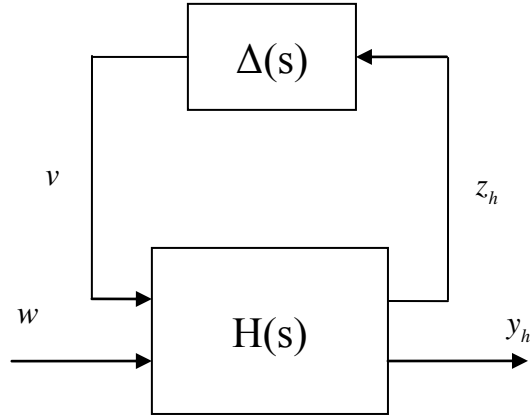


Figure 4.18 : Représentation LFT des incertitudes de modélisation du système en boucle fermée

### 7.1.2. LFT- application à l'étude de la robustesse de la stabilité

Si la propriété qu'on cherche à garantir est la stabilité, et si le système est stable ( $H(s)$  et  $\Delta(s)$  stables), la seule source d'instabilité provient du bouclage de  $H(s)$  par  $\Delta(s)$ , et il est donc équivalent d'étudier la stabilité du système de la Figure 4.19, avec  $M(s) = H_{zv}(s)$ .

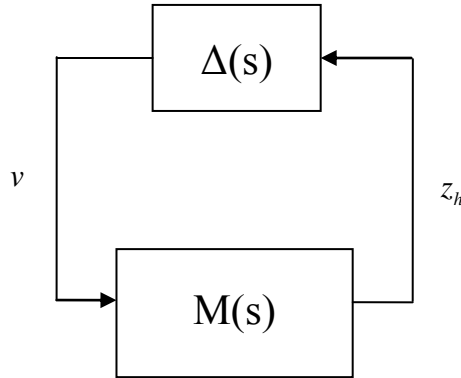


Figure 4.19 : Schéma d'analyse de la robustesse de la stabilité

## 7.2. Valeur singulière structurée

Définissons  $\underline{\Delta}$ , l'ensemble des matrices complexes présentant la même structure que  $\Delta(s)$  :

$$\underline{\Delta} := \left\{ \begin{array}{l} \Delta(s) = \text{diag} \left\{ \Delta_1(s), \dots, \Delta_q(s), \delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_r I_{r_r}, \varepsilon_1 I_{c_1}, \dots, \varepsilon_s I_{c_s} \right\} \in C^{k \times k} \\ \Delta_i(s) \in C^{k_i \times k_i} ; \quad \delta_i \in R ; \quad \varepsilon_i \in C \end{array} \right\} \quad (4.32)$$

La valeur singulière structurée  $\mu_{\underline{\Delta}}(M)$  est l'inverse de la plus petite valeur singulière  $\bar{\sigma}(\Delta)$  sur l'ensemble  $\underline{\Delta}$ , tel que  $\det(I - \Delta M) = 0$ , c.-à-d.:

$$\mu_{\underline{\Delta}}(M) := \left( \inf_{\Delta \in \underline{\Delta}} (\bar{\sigma}(\Delta) : \det(I - \Delta M) = 0) \right)^{-1}$$

L'inverse de  $\mu_{\underline{\Delta}}(M)$  peut donc être interprétée comme la plus petite norme d'une matrice  $\Delta$  appartenant à l'ensemble  $\underline{\Delta}$  pour laquelle le système linéaire en  $v, z_h$  représenté sur la Figure 4. 20 devient singulier. Donc plus  $\mu_{\underline{\Delta}}^{-1}(M)$  est grand, plus le système tolère des incertitudes et plus il est robuste. Inversement, plus  $\mu_{\underline{\Delta}}(M)$  est petit, plus la stabilité est de norme élevée. D'où le théorème des petits gains.

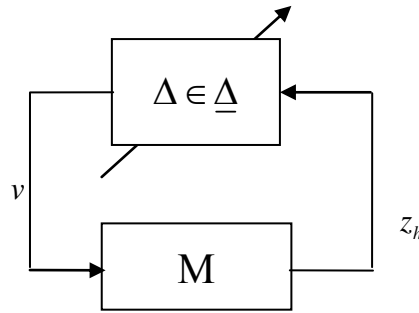


Figure 4. 20 : Interprétation de la valeur singulière structurée

### 7.3. Théorème des petits gains généralisé

De la définition de  $\mu_{\underline{\Delta}}(M)$ , on déduit le théorème suivant qui fonde le principe de la  $\mu$ -analyse (Doyle 1985; Zhou et al. 1996) :

#### Théorème :

Si  $H(s)$  n'a que des pôles à partie réelle négative, le système de la Figure 4. 18 est stable pour toute incertitude  $\Delta(s)$  décrite par l'équation (4.32), tel que  $\|\Delta(s)\|_{\infty} < 1$  si et seulement si :

$$\forall \omega \quad \mu_{\underline{\Delta}}(M(j\omega)) \leq 1. \quad (4.33)$$

La démonstration ne sera pas faite ici, elle peut être retrouvée dans (Duc & Font 1999).

### 7.4. Vérification de la robustesse du système vis-à-vis des variations de la masse

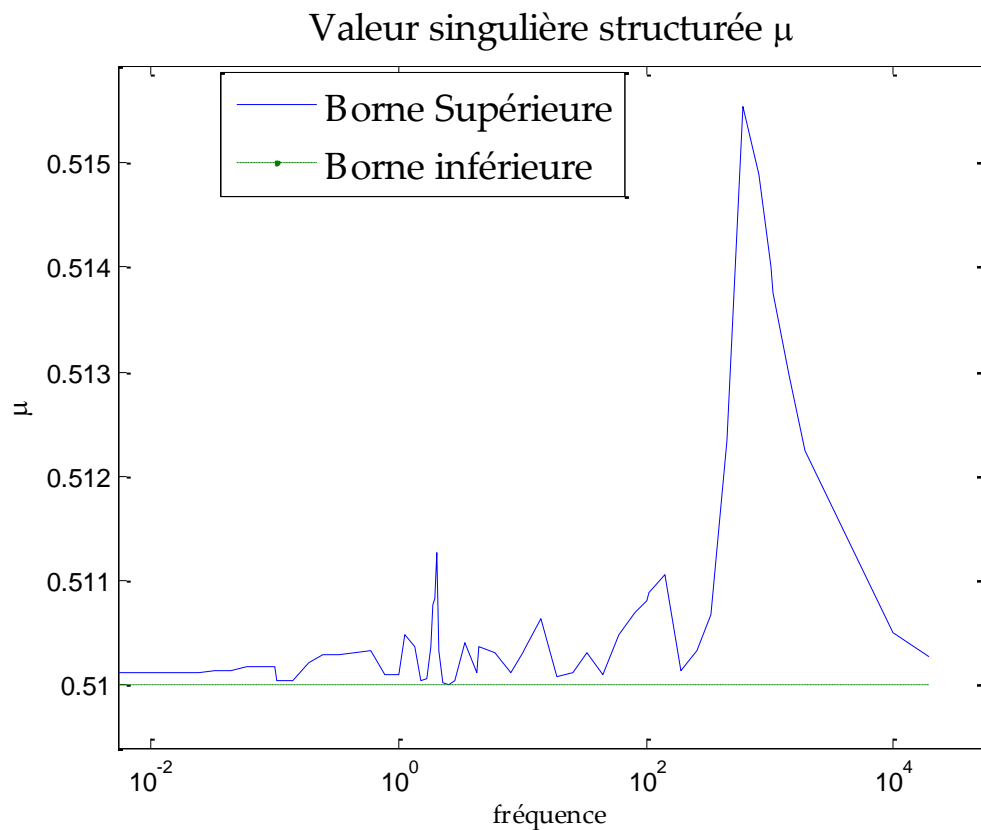
Ainsi, d'après le théorème généralisé des petits gains présenté ci dessus, vérifier la robustesse de la stabilité de la boucle fermée, revient à calculer  $\mu_{\underline{\Delta}}(M(j\omega))$ . Le système est stable si  $\forall \omega \quad \mu_{\underline{\Delta}}(M(j\omega)) \leq 1$ , et plus  $\mu_{\underline{\Delta}}(M(j\omega))$  est petit, plus la stabilité du système est robuste. Le calcul de  $\mu_{\underline{\Delta}}(M(j\omega))$  est un problème d'une complexité importante. Nous utilisons pour le calcul les fonctions implémentées dans Matlab. Les algorithmes disponibles permettent

l'estimation de bornes inférieure et supérieure de  $\mu_{\Delta}(M)$ , en fonction  $\omega$ , en utilisant par *e.g.* une formulation LMI.

La matrice d'incertitude  $\Delta(s)$  comprend les incertitudes normalisées sur la masse  $m$  du modèle du système en boucle fermée.

La masse du véhicule à vide du véhicule est de 270 Kg (*cf.* annexe 2). Estimant le poids d'un passager compris entre 50Kg et 100Kg, la masse totale du véhicule peut varier entre 330Kg (1 passager de 50Kg) et 500Kg (si l'on considère 2 passagers de 100Kg et une faible charge dans le coffre). La variation de masse est alors de 500-330=170Kg donc de 51% ( $=100 \times 170 / 330$ ).

L'incertitude sur la masse étant définie de 51%, nous calculons alors les marges supérieures et inférieures de la valeur singulière structurée. Les résultats de la boucle fermée correspondant au véhicule couplé au **régulateur 4** sont présentés sur la Figure 4. 21.



**Figure 4. 21 : Etude de la robustesse de la stabilité.**

La figure montre que la valeur de  $\mu$  n'excède pas 0.516, le système reste donc stable vis-à-vis de la variation de masse envisagée. Précisément, le système est robuste et peut même tolérer une masse totale en charge  $m = 650\text{Kg}$  (limite de la stabilité).

Cette étude a permis de vérifier la robustesse du régulateur vis-à-vis des variations de masse. Reste le problème de la variation de la vitesse. Si la  $\mu$ -analyse indique que le système peut tolérer jusqu'à 55% quant à la variation de vitesse, il s'agit de stabilité et non de performance, considérant de plus la vitesse incertaine mais fixe. Il importe donc de concevoir un régulateur capable de s'adapter en fonction de la vitesse.

## 8. Contrôleur paramétré par la vitesse longitudinale du véhicule

Les régulateurs précédents ont été synthétisés en considérant une valeur gelée de la vitesse longitudinale  $V_x$ . Même de bonnes marges de robustesse ne peuvent garantir la stabilité du système sur la plage de variation possible pour  $V_x$  (cf. Chapitre 25.2) Nous proposons dans ce paragraphe un régulateur dépendant de la vitesse longitudinale du véhicule.

Nous nous basons sur les éléments de synthèse du **régulateur 4**,  $R^{(4)}$ , et nous calculerons les gains correspondants aux différentes valeurs de  $V_x$

En effet, les matrices du modèle du véhicule (cf. équation (4.20) ou (2.22)) sont fonctions de la vitesse longitudinale  $V_x$ . C'est donc un modèle Linéaire à Paramètres Variant (LPV). Plusieurs approches sont proposées dans la littérature pour obtenir un régulateur dépendant de paramètres variants, notamment les approches  $H_{2/\infty}$  généralisées aux systèmes LPV, comme dans (Apkarian et al. 1995), où les auteurs se ramènent à un problème LMI sous l'hypothèse d'un modèle affine en les paramètres variants et pour un domaine paramétrique admissible polytopique. Une telle approche est intéressante en ce qu'elle garantit *a priori* la stabilité de la boucle fermée ; elle n'exploite pas cependant le caractère rationnel de la dépendance paramétrique et ne tient pas compte d'éventuelles bornes sur la vitesse de variation du paramètre. L'approche retenue ci-dessous est pragmatique, et procède par interpolation des régulateurs LTI obtenus pour un ensemble discret de vitesses longitudinales. Elle garantit ainsi peu ou prou de bonnes performances en chaque point de fonctionnement. Des garanties de stabilité seront par ailleurs apportées par une analyse *a posteriori*.

### 8.1. Calcul du régulateur et étude de stabilité

Nous travaillons ici directement sur les gains du **régulateur 4**  $R^{(4)}$  (cf. équation (4.31)). La première étape est l'observation de la variation des gains de ce régulateur en fonction de la vitesse, pour  $V \in \Omega = \{2, 3, \dots, 18\} \text{ m/s}$ , les pondérations  $Q$  et  $R$  étant celles retenues dans le Tableau 4. 2. Un régulateur  $R^{(4)}_v$  est synthétisé pour chaque valeur de  $V_x = V_i \in \Omega$ , et nous



traçons les gains du régulateur en fonction de la vitesse (cf. Annexe 3). Les résultats montrent que la variation des gains peut être approximée par une fonction de la forme :

$$R^{(4)}(V_x) = K_c + K_v V_x + K_{1/V} / V_x \quad (4.34)$$

dépendante de  $V$  et  $1/V$ , avec  $K_c$ ,  $K_v$  et  $K_{1/V}$  des constantes à identifier.

Ces valeurs se déduisent aisément de la résolution au sens des moindres carrés du système d'équations suivant :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & V_1 & 1/V_1 \\ 1 & V_2 & 1/V_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & V_{17} & 1/V_{17} \end{pmatrix}}_M \underbrace{\begin{pmatrix} K_c \\ K_v \\ K_{1/V} \end{pmatrix}}_{R_v^{(4)}} = \underbrace{\begin{pmatrix} R^{(4)}_{v1} \\ R^{(4)}_{v2} \\ \dots \\ R^{(4)}_{v17} \end{pmatrix}}_{R_v^{(4)}} \Rightarrow \begin{pmatrix} K_c \\ K_v \\ K_{1/V} \end{pmatrix} = (M^T M)^{-1} M^T R_v^{(4)} \quad (4.35)$$

La comparaison de la norme du transfert de la boucle fermée  $\|T_{zw}\|_2$  (Figure 4. 2) obtenue aux points  $V_i \in \Omega$  à partir du régulateur interpolé  $R^{(4)}(V)$  avec celle obtenue avec le régulateur optimal constant  $R^{(4)}_v$ , montrent que l'approximation est acceptable, et que la stabilité et les performances sont garanties en *chaque point* (Figure 4. 22).

Les valeurs des gains  $K_c$ ,  $K_v$  et  $K_{1/V}$  sont données par le Tableau 4. 3.

	$K_{a_{per}}^{(4)}$	$K_{\dot{\psi}}^{(4)}$	$K_{\theta}^{(4)}$	$K_{\dot{\theta}}^{(4)}$	$K_{a_{per}^I}^{(4)}$	$K_{\delta}^{(4)}$	$K_{\dot{\delta}}^{(4)}$
$K_c$	-1.7x10	-3.5x10 <sup>2</sup>	6.1	8.8 x10 <sup>-12</sup>	-5.3 x10 <sup>-12</sup>	-1.0 x10 <sup>3</sup>	-1.0 x10 <sup>3</sup>
$K_v$	-1.4 x10	1.5 x10 <sup>3</sup>	2.1 x10 <sup>2</sup>	6.1	8.0 x10 <sup>3</sup>	-5.3 x10 <sup>3</sup>	-1.0 x10 <sup>3</sup>
$K_{1/V}$	2.2 x10	-2.4 x10 <sup>3</sup>	1.6 x10 <sup>3</sup>	1.5 x10 <sup>2</sup>	2.1 x10 <sup>-10</sup>	-1.9 x10 <sup>4</sup>	1.0 x10 <sup>3</sup>

Tableau 4. 3 : Valeurs des gains du régulateur LPV

## 8.2. Analyse *a posteriori* de la stabilité sur la plage continue de $V_x$

Ces calculs ponctuels ne donnent par contre aucune garantie dans le cas où la vitesse évolue dynamiquement sur la plage  $V_x \in [2, 18] \text{ m/s}$ . Pour s'assurer de la stabilité et des bonnes performances dans ce cas de figure, nous proposons d'utiliser les résultats proposés dans (Bouali 2008; Bouali et al. 2008).

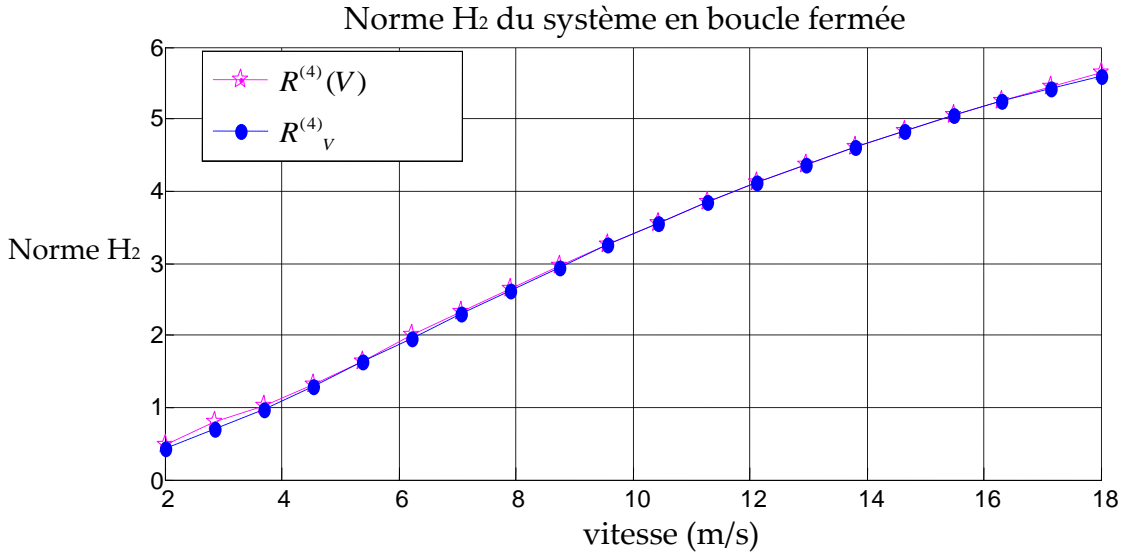


Figure 4. 22 : Norme  $H_2$  du transfert  $\|T_{zw}\|_2$  du contrôleur interpolé  $R^{(4)}(V)$  et des contrôleurs  $R^{(4)}_{V_i}$  synthétisés pour chaque  $V_i \in \Omega$

Le résultat proposé dans ( Bouali 2008;Bouali et al. 2008) consiste à analyser la stabilité et la performance des systèmes LPV rationnels (ici dépendance en  $V_x$  et  $1/V_x$ ) à travers l'utilisation de formes implicites, dites aussi formes descripteurs. Habituellement utilisé pour représenter des systèmes décrits par des équations algèbro-différentielles, le formalisme descripteur est mis à contribution pour simplifier la dépendance paramétrique des systèmes LPV rationnels. La **dépendance de la réalisation descripteur devient affine** en les paramètres variants (ici  $V_x$ ). La détermination du niveau de performance  $H_2$  de ces systèmes passe par la formulation du problème d'optimisation d'un critère linéaire sous contraintes LMI paramétriques de dimensions finies, ce qui évite d'utiliser un maillage de l'espace paramétrique. Cette caractérisation LMI dite "dilatée" (par l'usage des formes descripteurs) est privilégiée à la formulation standard du fait qu'elle propose des contraintes LMI **sans produits** entre la matrice de Lyapunov dépendant des paramètres et les matrices d'état du système implicite affine en les paramètres variants. Il s'agit d'une extension des résultats d'analyse du cadre « LTI implicite » à celui des systèmes LPV implicites affines.

On peut, utilisant ce résultat, évaluer l'énergie  $\|z\|_2$  en réponse à une entrée impulsionnelle  $w$  sur le modèle standard en boucle fermée, pour une vitesse longitudinale variant arbitrairement dans  $V_x \in [2, 18] \text{ m/s}$  (aucune hypothèse quant à la bornitude de  $\dot{V}_x$ ). On montre ainsi  $\max_{V_x \in [2, 18]} \|z\|_2 < 55.23$ , ce qui garantit *a fortiori* la stabilité quadratique.

Lorsque nous rajoutons la contrainte  $\dot{V} \in [-14, 7] \text{ m/s}^2$  (sur la base de considérations physiques sur l'accélération et la décélération maximale d'un véhicule), la valeur maximale de l'énergie  $\|z\|_2$  est divisée par 5,  $\max \|z\|_2 = 13.48$ . Sachant que ce résultat reste pessimiste, il permet

cependant de vérifier la qualité des performances : la valeur obtenue est seulement le double celle de la norme  $H_2$  obtenue dans le pire cas LTI (cf. Figure 4. 22).

### 8.3. Etude des performances en simulation

Le scénario de simulation est modifié en particulier dans le but de vérifier les performances du régulateur à différentes vitesses ; les nouveaux profils d'angle de braquage et de vitesse longitudinale sont décrits par les Figure 4. 24 et Figure 4. 23.

Nous comparons les performances du véhicule obtenues avec le **régulateur 4**  $R^{(4)}_v$  (régulateur LTI conçu à la vitesse figée à  $V_x = 8m/s$ ), avec le  $R^{(4)}(V)$  dépendant de la vitesse obtenue par interpolation. Le modèle de simulation utilisé est le modèle non linéaire à cinq DDL et à trois entrées :  $M_t$ ,  $\delta$  et aussi  $F_t$ , la force de propulsion permettant de faire varier la vitesse. Nous considérons le véhicule en accélération, mu par la force constante  $F_t = 50N$ .

#### Résultats :

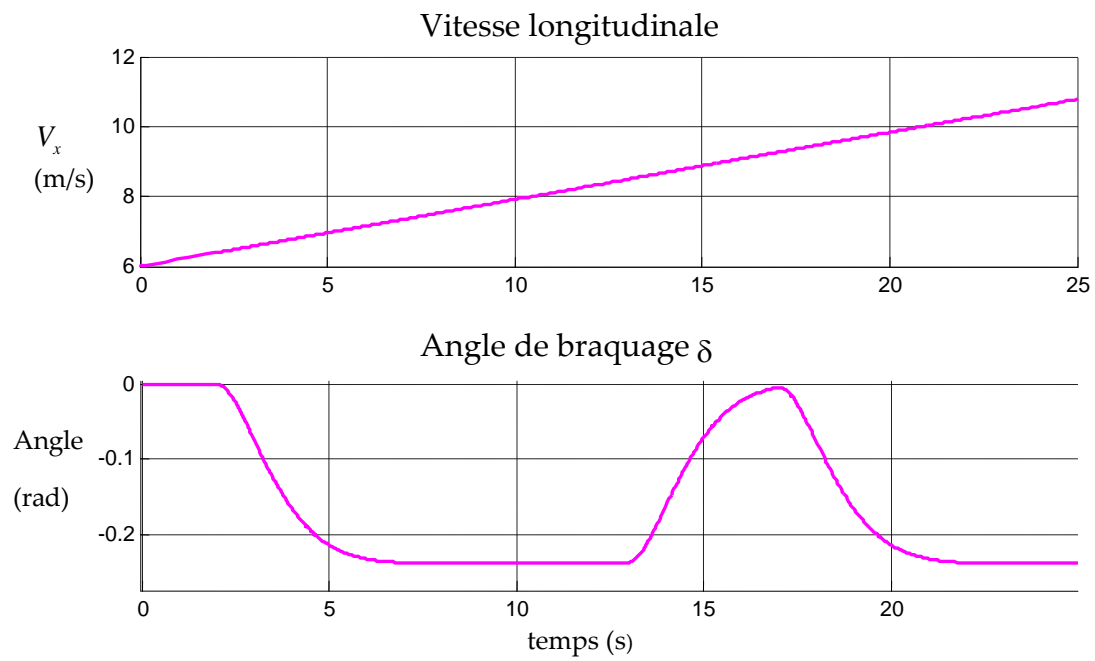
Pour une vitesse variant entre 8.5 et 10  $m/s$  (second virage  $t = 13s$  à  $t = 20s$ ) :

- Le couple maximal sollicité en phase transitoire est de  $50N.m$  avec  $R^{(4)}(V)$  alors qu'elle atteint  $100N.m$  avec le  $R^{(4)}_v$  (à  $t = 18s$ ) ; la réduction est de 50% (Figure 4. 24).
- L'accélération latérale maximale est réduite de 63%, passant (en valeur absolue) de  $0.63m/s^2$  à  $0.2m/s^2$  (Figure 4. 24).

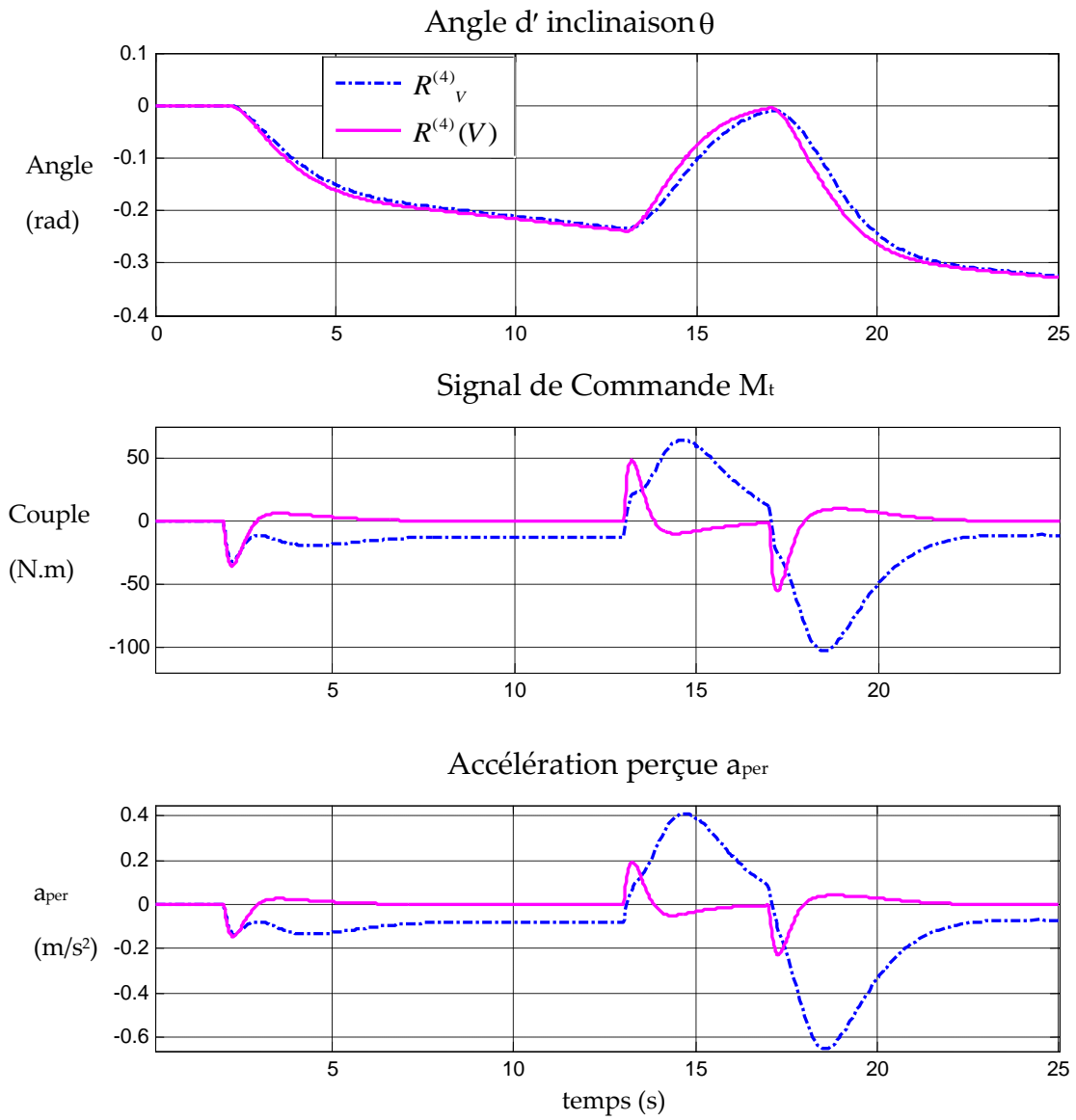
En phase de trajectoire circulaire :

- L'accélération perçue et le couple d'inclinaison s'annulent simultanément avec le régulateur  $R^{(4)}(V)$ , tandis que le régulateur  $R^{(4)}_v$  conduit à  $a_{per} = 0.1m/s^2$  et  $M_t = 15N.m$ .
- La légère différence sur l'angle d'inclinaison entre les deux régulateurs se répercute très légèrement sur la trajectoire du véhicule (Figure 4. 24 et Figure 4. 25).

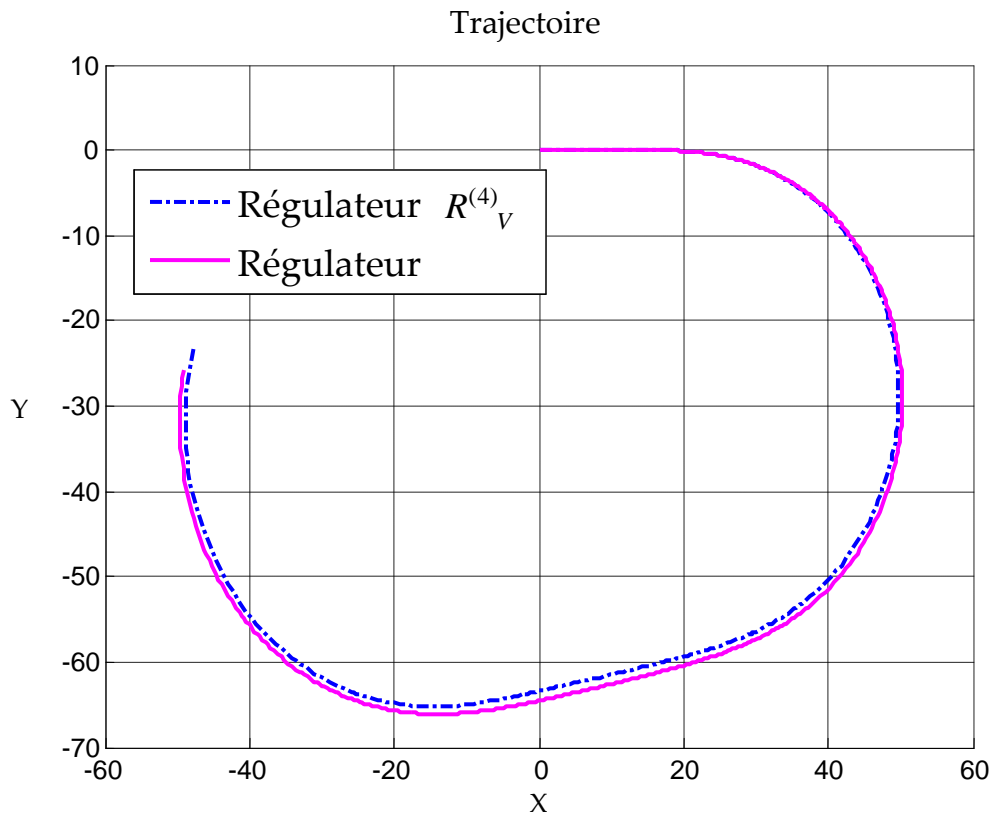
Comme prévu, même si le véhicule reste stable avec le régulateur  $R^{(4)}_v$ , les performances obtenues avec le régulateur  $R^{(4)}(V)$  (interpolé) sont bien meilleures.



**Figure 4. 23 : Profil de la vitesse longitudinale et de l'angle de braquage du conducteur**



**Figure 4. 24:** Angle d'inclinaison du véhicule, signal de commande et accélération perçue résultant de la simulation du régulateur  $R^{(4)}_v$  indépendant de la vitesse et du régulateur  $R^{(4)}(V)$ .



## 9. Conclusion

Nous avons considéré dans ce chapitre les véhicules munis d'un système DTC. Plusieurs régulateurs LTI de différentes structures et synthétisés à partir de différents critères ont été proposés. Nous avons décliné pour la synthèse de chacun des régulateurs la méthodologie de commande proposée dans la première partie du chapitre, qui s'appuie sur un problème d'optimisation  $H_2$ -LQPF construit de manière systématique.

Notons que 3 voies ont été envisagées pour assurer le meilleur compromis robustesse/simplicité tout en n'utilisant que les mesures disponibles :

- i) synthèse par optimisation non linéaire via Hifoo par exemple,
- ii) synthèse avec observateur LTR (Mourad et al. 2011)
- iii) synthèse conduisant à une solution analytique, tirant partie de la relation biunivoque liant les variables d'état aux sorties mesurées et à l'entrée, voie exploitée par la suite.

Vis-à-vis de l'existant relativement aux VEI, les deux apports les plus importants quant à la stratégie de commande proposée sont :

- i) l'utilisation de l'angle et de la vitesse de braquage à des fins d'anticipation dans le signal de commande, et
- ii) la régulation directe de l'accélération latérale perçue.

Le régulateur LTI ayant les meilleurs performances et marges de stabilité est le régulateur 4, qui cherche à optimiser un critère mixte faisant intervenir les signaux :

- intégrale de l'accélération perçue et
- le couple d'inclinaison (entrée de commande).

Dans une deuxième partie, nous avons étendu la validité de ce régulateur, en procédant à partir d'un maillage de la plage de vitesse à la synthèse de régulateurs, puis par interpolation des régulateurs LTI obtenus pour chacune des vitesses considérées. La stabilité et les performances du régulateur LPV  $K(V)$  déduit des régulateurs à vitesse gelée  $K_v$  ont été évaluées.

Le chapitre suivant s'intéresse aux véhicules munis à la fois des systèmes DTC et STC. Le modèle de conception possède alors non plus un mais deux entrées de commande.

### 1. Introduction

S'inspirant de la dynamique des véhicules deux roues (bicyclette ou motorcycle), du phénomène de contre braquage notamment, le système STC ou 'Steering Tilt Control' offre une possibilité intéressante pour le contrôle de l'inclinaison des VEI. Le contre braquage et les caractéristiques des systèmes STC et DTC ont été expliqués au Chapitre 3. Pour résumer, lors d'un virage à droite, l'accélération centripète créée par la trajectoire curviligne tend à incliner le véhicule à gauche, tandis que la stabilité latérale nécessite une inclinaison à droite. Ainsi, avant d'amorcer le virage à droite, et pour un laps de temps négligeable, les roues sont braquées à gauche, le véhicule subissant alors une accélération centripète qui l'incline à droite. Les roues sont ensuite braquées à droite pour suivre la trajectoire souhaitée en état de stabilité.

Les avantages et inconvénients de chacun des systèmes ont été présentés dans le Tableau 3. 1 page 78. Ces comparaisons indiquent que le système le plus performant serait une combinaison des deux. La cohabitation des deux systèmes ne va cependant pas sans difficultés, notamment lorsqu'on procède à la transition d'un système vers l'autre. Les signaux de commande de chacun des systèmes peuvent en effet être antagonistes en phase transitoire. La stratégie proposée ici vise une coopération permanente entre systèmes STC et DTC (pas de commutation d'un système vers l'autre). Nous définirons en premier lieu l'architecture du système SDTC, et redéfinirons l'objectif de commande qui doit tenir compte des contraintes existantes quant à la modulation de l'angle de braquage. Nous procéderons ensuite à la synthèse d'un régulateur multivariable structuré s'appuyant une nouvelle fois sur la méthodologie présentée dans le chapitre 4. Les résultats seront ensuite présentés de même qu'une étude de la robustesse du régulateur ainsi obtenu. En dernier lieu, nous adapterons le régulateur aux variations de la vitesse longitudinale, à l'aide d'une stratégie d'interpolation.



## 1.1. La structure SDTC

Nous considérerons par la suite l'architecture SDTC décrite par la Figure 5. 1 dans laquelle le régulateur STC module l'angle de braquage  $\delta_{cond}$  désiré par le conducteur d'une valeur  $\delta_r$ , selon :

$$\delta = \delta_{cond} + \delta_r. \quad (5.1)$$

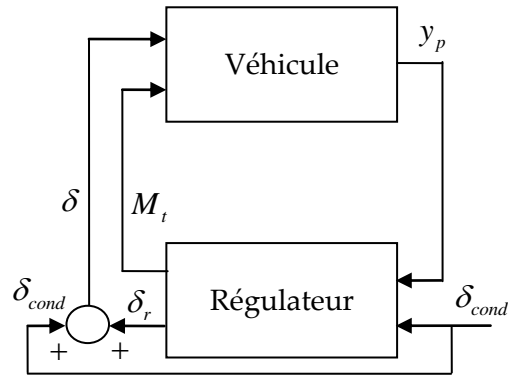


Figure 5. 1 : Architecture du régulateur STC

## 2. Objectifs du régulateur SDTC

- 1- La stabilité latérale, objectif principal du régulateur, résulte d'une accélération latérale maîtrisée. On peut ainsi s'intéresser à  $a_{per}$  que l'on souhaite aussi faible que possible, voire annuler son intégrale  $a_{per}^I$ .
- 2- D'autre part, les régulateurs SDTC modulent l'angle de braquage des roues  $\delta$ , qui n'est dans ce cas plus égal à l'angle  $\delta_{cond}$  désiré par le conducteur. Ceci nécessite une attention particulière quant au suivi de trajectoire. Le véhicule doit s'écarter le moins possible de la trajectoire souhaitée exprimée au travers de  $\delta_{cond}$  ; il faut donc que  $\delta = \delta_{cond} + \delta_r \rightarrow \delta_{cond}$ , et par conséquent  $\delta_r \rightarrow 0$ .
- 3- Finalement, le couple de l'actionneur  $M_t$  doit être utilisé avec parcimonie pour limiter les dépenses énergétiques.

### 3. Régulateur SDTC structuré

Nous supposons le véhicule doté d'un actionneur d'inclinaison et d'un système steer-by-wire comme illustré par la Figure 5. 1. Le Régulateur SDTC proposé est continu, **sans commutation**, dans le sens où **STC et DTC agissent simultanément**. Le système à donc deux entrées de commande générées par le régulateur : la modulation de l'angle de braquage  $\delta_r$  et le couple d'inclinaison  $M_t$ . Le régulateur retenu répond aux mêmes contraintes structurelles que celles imposées au régulateur DTC (cf. équation (4.7)), i.e. :

$$u = \begin{pmatrix} \delta_r \\ M_t \end{pmatrix} = -K_y y_s - K_e e_y = \underbrace{-K_p y_p - K_e e_y}_{\text{rétroaction}} \underbrace{-K_w y_{2w}}_{\text{précompensation}}$$

De même que pour les systèmes DTC, le problème de synthèse  $H_2$  du régulateur SDTC par retour de sorties peut être transformé en un problème de synthèse  $H_2$  par retour d'état pour lequel la solution analytique est connue : cette transformation est possible en exploitant la relation entre les mesures disponibles ( $a_{per}, \dot{\psi}, \theta, \dot{\theta}, u$ ) et les états ( $\dot{y}, \dot{\psi}, \theta, \dot{\theta}$ ) (cf. Chapitre 4.2.3).

Tout comme au paragraphe 2 du chapitre 4, nous procédons à la construction du modèle standard structuré dont on rappelle la forme : Figure 4. 26.

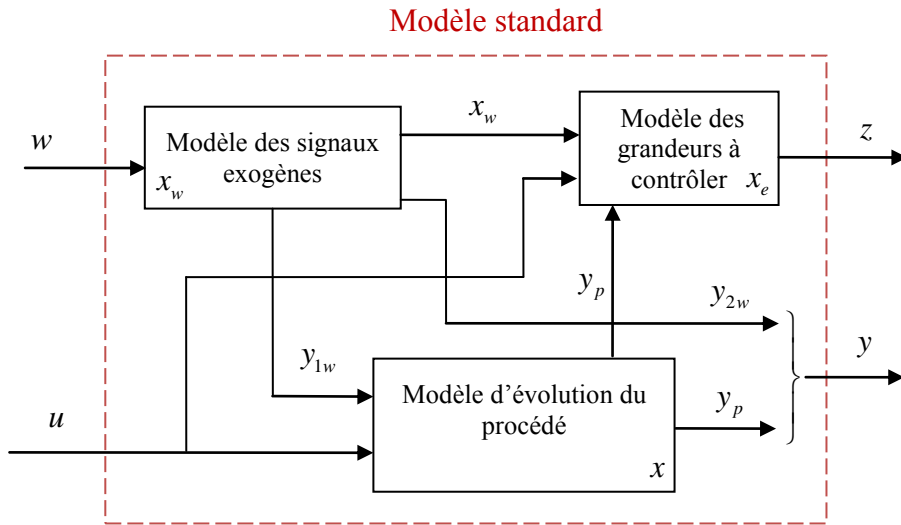


Figure 4. 26 : (copie) : Construction du modèle standard

### 3.1. Synthèse du régulateur SDTC

#### 3.1.1. Configuration du problème

- **Signaux de commande** : modulation de l'angle de braquage  $\delta_r$  et couple d'inclinaison  $M_t$ , d'où,  $u = [\delta_r \ M_t]^T$ .
- **Sorties à contrôler et références associées**: Les objectifs présentés au paragraphe 2 ci dessus sont d'assurer la stabilité latérale du véhicule en annulant l'accélération perçue  $a_{per}^l$ , tout en assurant le suivi de trajectoire en minimisant  $\delta_r$ , et aussi en minimisant le couple d'inclinaison  $M_t$ . La référence est évidemment nulle quant à l'accélération latérale perçue, et les références pour  $M_t$  et  $\delta_r$  sont construites de façon interne :  $u_{ref} = -F_a x_w$  (cf. Chapitre 42.3). S'il est évident que la référence retrouvée pour  $\delta_r$  est nulle, il est intéressant de noter que  $M_{t-ref} = 0$  aussi, puisque cet objectif vas de pair avec  $a_{per} = 0$ . Lorsque le véhicule est en position de stabilité nominale assurant  $a_{per} = 0$  au cdg, le couple  $M_t$  n'est pas sollicité.

Les points suivants sont identiques au cas du système DTC, que nous rappelons :

- **Mesures disponibles** : vitesse de lacet  $\dot{\psi}$ , angle et vitesse angulaire d'inclinaison  $\theta$  et  $\dot{\theta}$ , accélération latérale perçue  $a_{per}$ , angle et vitesse angulaire de braquage du conducteur  $\delta_{cond}$  et  $\dot{\delta}_{cond}$ .
- **Perturbations mesurées / à rejeter**: De même que pour les systèmes DTC, l'angle de braquage  $\delta$  est considéré comme une perturbation dont l'effet sur la valeur de l'accélération perçue est à rejeter.
- **Perturbations non mesurées** : ce sont les perturbations relatives aux irrégularités de la chaussée, le dévers de la route, ou aussi les rafales de vents. Non mesurables, elles ne sont pas prises en compte lors de la conception du régulateur, mais leur effet sur le véhicule sera étudié.

#### 3.1.2. Définition du modèle standard

Le modèle standard est constitué des modèles du procédé, de l'exosystème et des grandeurs à contrôler comme définis ci-dessous.

##### 3.1.2.1 Définition du modèle du procédé

Ce modèle résume la dynamique du véhicule:

$$\begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} (-\frac{a}{mV_x} - \frac{h^2 a}{I_x V_x}) & (-\frac{b}{mV_x} - V_x - \frac{h^2 b}{I_x V_x}) & 2(\lambda_f + \lambda_r)(\frac{1}{m} + \frac{h^2}{I_x}) - \frac{mgh^2}{I_x} & 0 \\ (-\frac{b}{I_z V_x}) & -\frac{2(C_f l_f^2 + C_r l_r^2)}{I_z V_x} & \frac{2(\lambda_f l_f - \lambda_r l_r)}{I_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{ha}{I_x V_x} & \frac{hb}{I_x V_x} & \frac{mgh - 2h(\lambda_f + \lambda_r)}{I_x} & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\psi} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} 2C_f(\frac{1}{m} + \frac{h^2}{I_x}) \\ 2C_f l_f \\ 0 \\ -2C_f h \end{bmatrix}}_{B_\delta} (\delta_r + \delta_{cond}) + \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{h}{I_x} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I_x} \end{bmatrix}}_{B_M} M_t$$

$$a = 2(C_f + C_r), b = 2(C_f l_f - C_r l_r), c = 2(\lambda_f + \lambda_r), B = [B_\delta \quad B_M].$$

Il ne diffère de celui utilisé pour les systèmes DTC que par le fait que l'angle de braquage des roues  $\delta$  est constitué d'une entrée braquage conducteur  $\delta_{cond}$  et d'une entrée de commande  $\delta_r$  tel que  $\delta = \delta_r + \delta_{cond}$ .

Les signaux  $u$ ,  $y_{1w}$  et  $y_p$  de la Figure 4. 26 (cf. Figure 5. 2), sont ici donnés par:

- $u = [M_t \quad \delta_r]^T$
- $y_{1w} = \delta_{cond}$
- $y_p = (\dot{\psi}, \theta, \dot{\theta}, a_{per})^T$

Enfin, on trouve aisément les différents éléments du système (S) de l'équation (4.1), par identification des matrices  $A, B_w = B_\delta, B_u = [B_\delta, B_M], C, D_w = D_\delta, D_u = [D_\delta, D_M]$ .

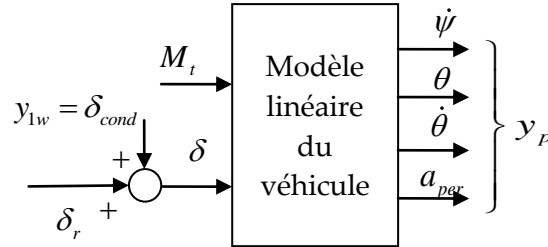


Figure 5. 2 : Entrées/ sorties du procédé

### 3.1.2.2 Définition du modèle des signaux exogènes

Le modèle de l'exosystème est identique à celui utilisé dans le cas du système DTC : absence de modèle référence pour  $a_{per}$  et  $\delta_r$  qui doivent être annulés (problème de régulation) et modèle du second ordre pour l'angle de braquage. Le modèle de l'exosystème est décrit par l'équation (4.25).

### 3.1.2.3 Définition du modèle des grandeurs à contrôler

Il s'agit de définir le vecteur  $e$  des écarts à réguler, dont la forme générale est décrite par l'équation (4.4), que nous rappelons :

$$(S_{gc}) \begin{cases} \dot{x}_e = A_e x_e + \begin{bmatrix} B_{ex} & B_{ew} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_w \end{bmatrix} + B_{eu} u \\ e = \begin{bmatrix} e_y \\ e_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{ey} \\ C_{eu} \end{bmatrix} x_e + \begin{bmatrix} D_{e11} & D_{e12} \\ D_{e21} & D_{e22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_w \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} D_{eu1} \\ D_{eu2} \end{bmatrix}}_{D_u} u \\ z = Q_0^{\frac{1}{2}} e \end{cases} \quad (5.2)$$

Le vecteur  $e$  est constitué de erreurs sur les sorties à contrôler  $e_y$  et des erreurs sur la commande  $e_u$  :

- $e_u = [\delta_{r-ref} - \delta_r \quad M_{t-ref} - M_t]$ , où  $[\delta_{r-ref} \quad M_{t-ref}]^T = F_a x_w$  sont calculés de façon interne (cf. Chapitre 42.3). Mais il est intéressant de préciser qu'en régime stationnaire  $[\delta_{r-ref} \quad M_{t-ref}]^T \rightarrow [0 \quad 0]^T$  puisque  $\delta_{r-ref} = 0$  implique un bon suivi de trajectoire et  $M_{t-ref} = 0$  exprime une erreur statique nulle.
- $e_y$  exprime l'objectif fondamental de la commande qui est d'assurer la stabilité latérale et le confort des passagers en minimisant l'accélération latérale perçue. Tout comme au chapitre 4, il s'avère que le choix de minimiser  $a_{per}^I$  plutôt que  $a_{per}$  offre un bon compromis performances /robustesse. Ainsi, le modèle des grandeurs à contrôler s'écrit :

$$(S_{gc}) \begin{cases} e = \begin{bmatrix} e_y \\ e_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{per} \\ \delta_r - \delta_{r-ref} \\ M_t - M_{t-ref} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{e11} & 0 \\ 0 & F_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_p \\ x_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ z = Q_0^{\frac{1}{2}} e = Q_0^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} a_{per}^I & \delta_r - \delta_{r-ref} & M_{t-ref} - M_t \end{bmatrix}^T \\ (e(t) \in R^3, z(t) \in R^3) \end{cases} \quad (5.3)$$

### 3.1.3. Réglage des pondérations et synthèse du Régulateur

Le problème étant formalisé, nous cherchons dans cette dernière étape à régler les pondérations contenues dans la matrice  $Q_0$ , de sorte à assurer le meilleur compromis entre réduction de l'accélération latérale, suivi de trajectoire et faible sollicitation de l'actionneur.

La matrice  $Q_0$ , de dimension 3, s'écrit  $Q_0 = \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 \\ 0 & R_1 & 0 \\ 0 & 0 & R_2 \end{bmatrix}$  ; par conséquent :

$$z = \begin{bmatrix} \sqrt{Q} a_{per}^I & \sqrt{R_1} (\delta_r - \delta_{r-ref}) & \sqrt{R_2} (M_{t-ref} - M_t) \end{bmatrix}^T.$$

avec  $Q$ ,  $R_1$  et  $R_2$  des scalaires. Le réglage de leur valeurs relatives permet de privilégier une solution DTC ou STC pure, ou toute solution combinée.

- $Q$  pondère  $a_{per}^I$  ; nous normaliserons sa valeur à  $Q=1$ .
- $R_1$  est la pondération sur l'angle de braquage ; sa valeur doit être suffisamment importante relativement à  $Q$  et  $R_2$  pour permettre au véhicule de suivre la trajectoire curviligne. A l'extrême, choisir  $R_1$  faible permettrait certes d'annuler l'accélération latérale, mais avec une loi de commande  $\delta_r = -\delta_{cond}$ , qui contraint le véhicule à adopter une trajectoire rectiligne. A l'inverse, plus la valeur de  $R_1$  est importante, plus on se rapproche d'un fonctionnement **DTC pur**, l'angle aux roues étant égal à l'angle souhaité par le conducteur *i.e.*  $\delta = \delta_{cond}$  et  $\delta_r = 0$ .
- $R_2$  est la pondération sur le couple d'inclinaison. Choisir  $R_2$  « fort » conduit à un fonctionnement **STC pur**, dans lequel le couple direct d'inclinaison est nul :  $M_t = 0$ . Une valeur faible de  $R_2$  en revanche fait converger le régulateur SDTC vers un régulateur DTC.

Dans le but de montrer l'effet de ces réglages et les convergences du régulateur SDTC vers STC ou DTC, nous définissons les régulateurs avec les pondérations suivantes :

	$Q$	$R_1$	$R_2$
<b>Régulateur D</b> Pondérations DTC	1	$10^4$	$10^{-6}$
<b>Régulateur SD</b> Pondérations SDTC	1	$10^2$	$10^{-6}$
<b>Régulateur S</b> Pondérations STC	1	1	$10^{-2}$

**Tableau 5. 1 : Valeurs des pondérations des régulateurs**

Nous reportons dans le Tableau 5. 2 les valeurs des gains des régulateurs ainsi obtenus, et rappelons en dernière ligne les gains du régulateur mono-entrée DTC développé au chapitre 4.

Régulateur		$K_{\dot{y}}$	$K_{\dot{\psi}}$	$K_{\theta}$	$K_{\dot{\theta}}$	$K_{a_{per}^I}$	$K_{\delta}$	$K_{\dot{\delta}}$
D	$\delta_r$	-0.0049	0.0027	-0.0167	0.0039	0.0037	0.0709	0.0130
	$M_t$	$0.2335 \times 10^4$	$-0.1310 \times 10^4$	$0.8791 \times 10^4$	$0.2264 \times 10^4$	$-0.0928 \times 10^4$	$-3.6478 \times 10^4$	$-0.7148 \times 10^4$

SD	$\delta_r$	-0.1021	0.0544	-0.3352	-0.0792	0.0888	1.4318	0.2607
	$M_t$	$0.4040 \times 10^3$	$-0.2516 \times 10^3$	$2.1929 \times 10^3$	$0.7057 \times 10^3$	$0.4607 \times 10^3$	$-8.5839 \times 10^3$	$-2.0172 \times 10^3$
S	$\delta_r$	-0.1788	0.0394	-0.3595	-0.3784	0.2845	1.6733	0.3812
	$M_t$	0.0134	-0.0024	2.3751	15.5831	30.3163	-2.2191	-1.6348
DTC( $M_t$ )		$0.2435 \times 10^4$	$-0.1365 \times 10^4$	$0.9132 \times 10^4$	$0.2344 \times 10^4$	$-0.1000 \times 10^4$	$-3.7934 \times 10^4$	$-0.7452 \times 10^4$

Tableau 5. 2 : Valeurs des gains du retour d'état différents régulateurs pour  $V_x=8m/s$

### 3.2. Résultats et performances du régulateur SDTC

Nous retenons le scénario de simulation décrit dans le Chapitre 46.1, à la vitesse longitudinale  $V_x = 8m/s$ , puisqu'il permet de mettre en évidence les comportements à la fois transitoire et stationnaire du système en boucle fermée.

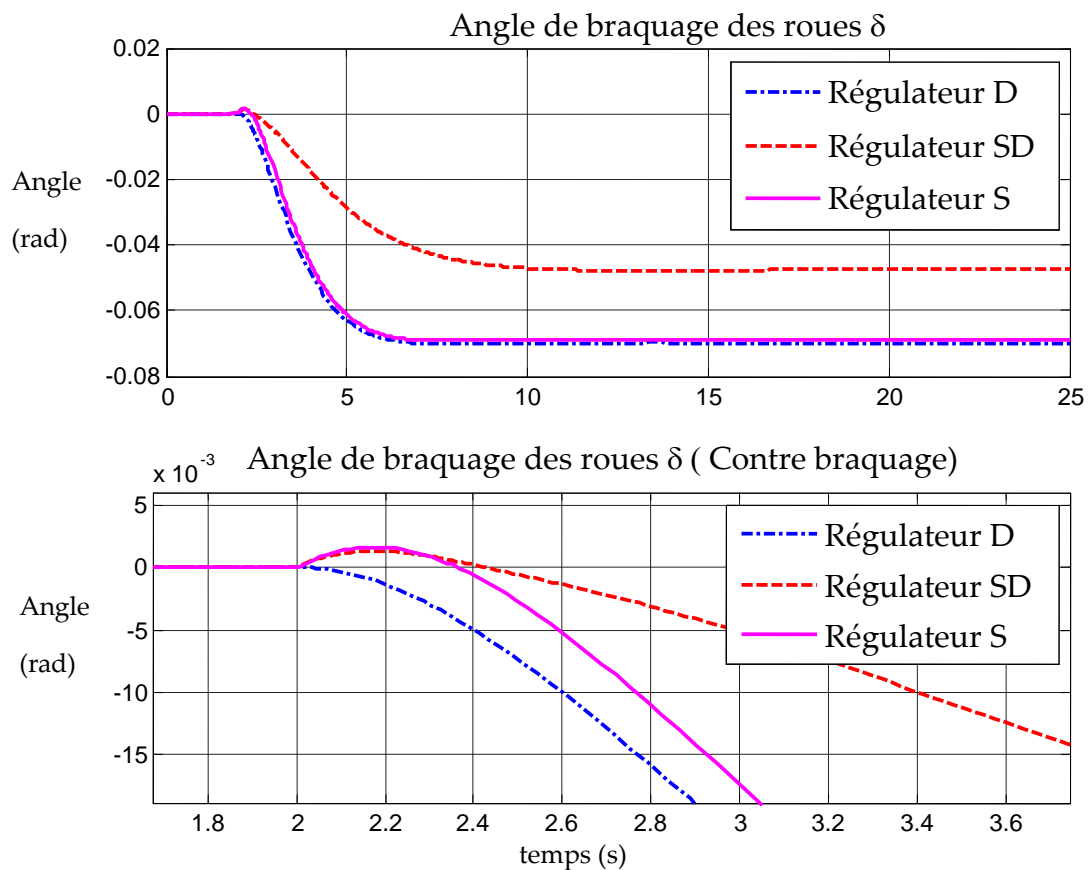


Figure 5. 3 : Angle de braquage appliqué aux roues,  $\delta = \delta_r + \delta_{cond}$  ; contre braquage visible sur la figure du bas.

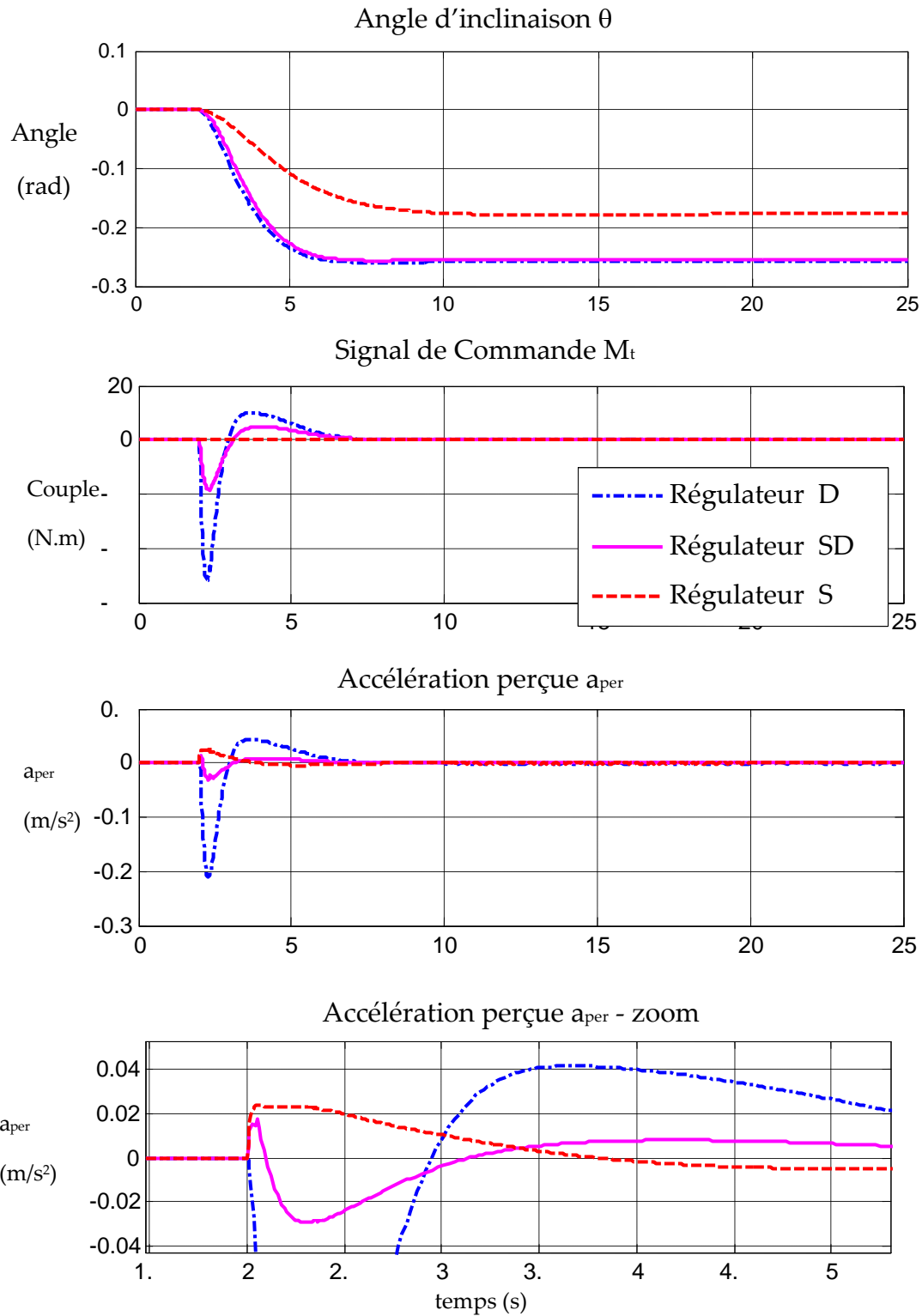


Figure 5. 4 : Signal de commande et accélération perçue résultant de la simulation du modèle NL, à  $V_x=8\text{m/sec}$ .



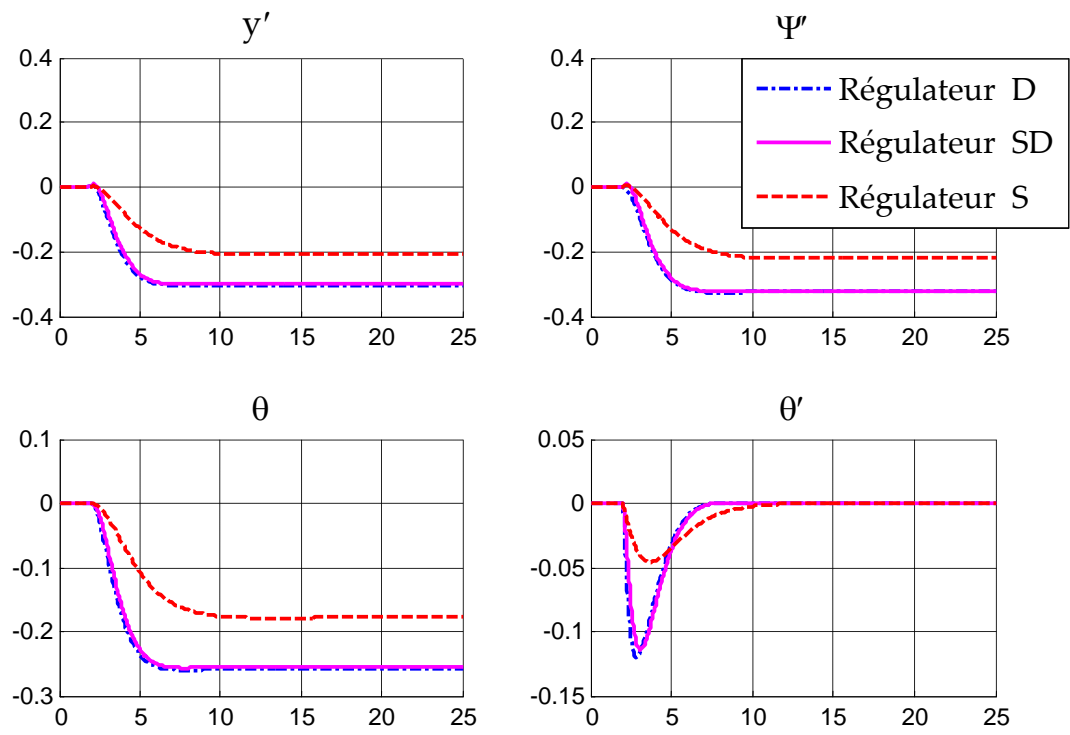


Figure 5.5 : Valeurs des états du système

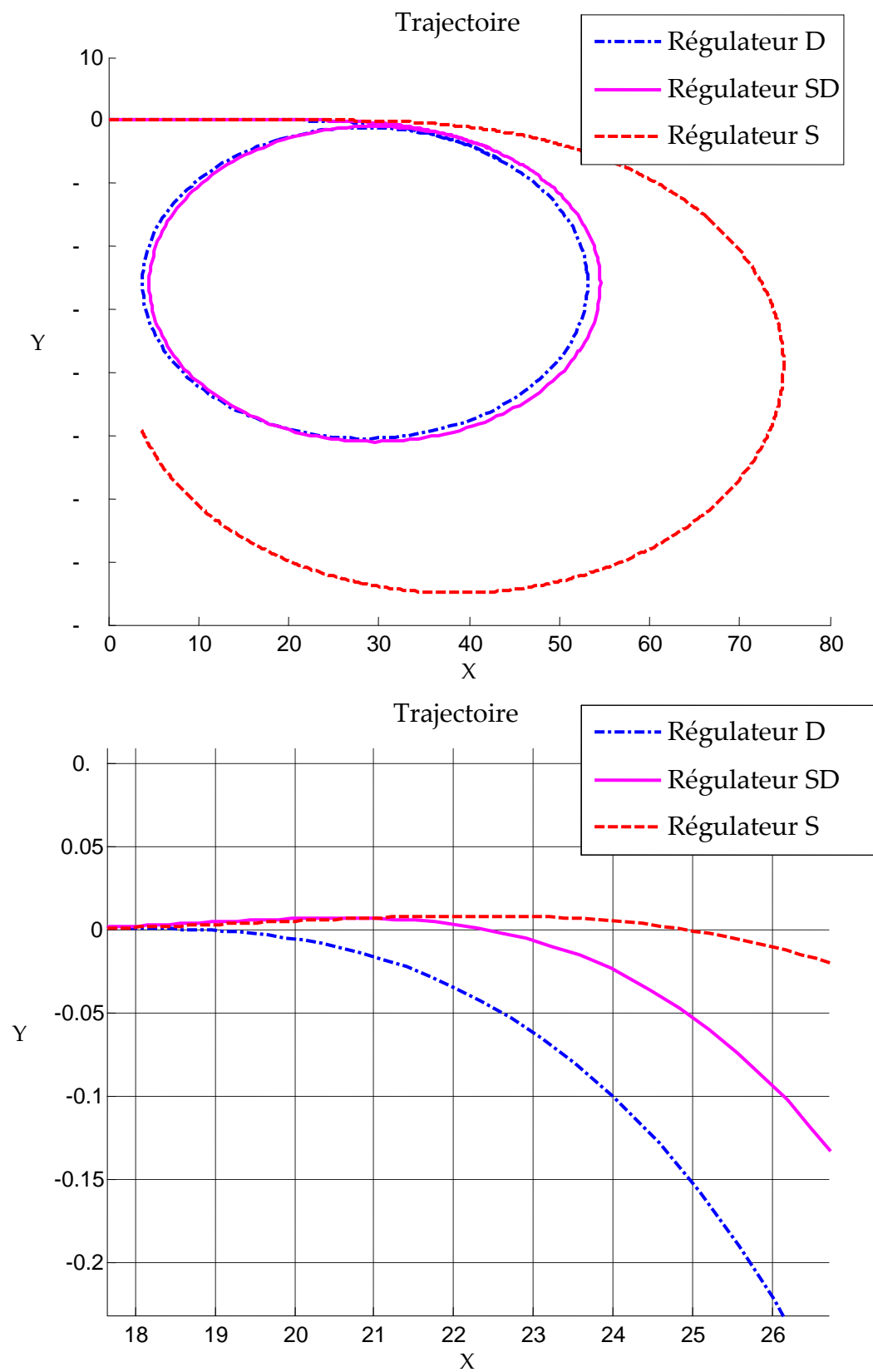


Figure 5. 6 : Trajectoire du véhicule (haut)- zoom sur la phase transitoire (bas)

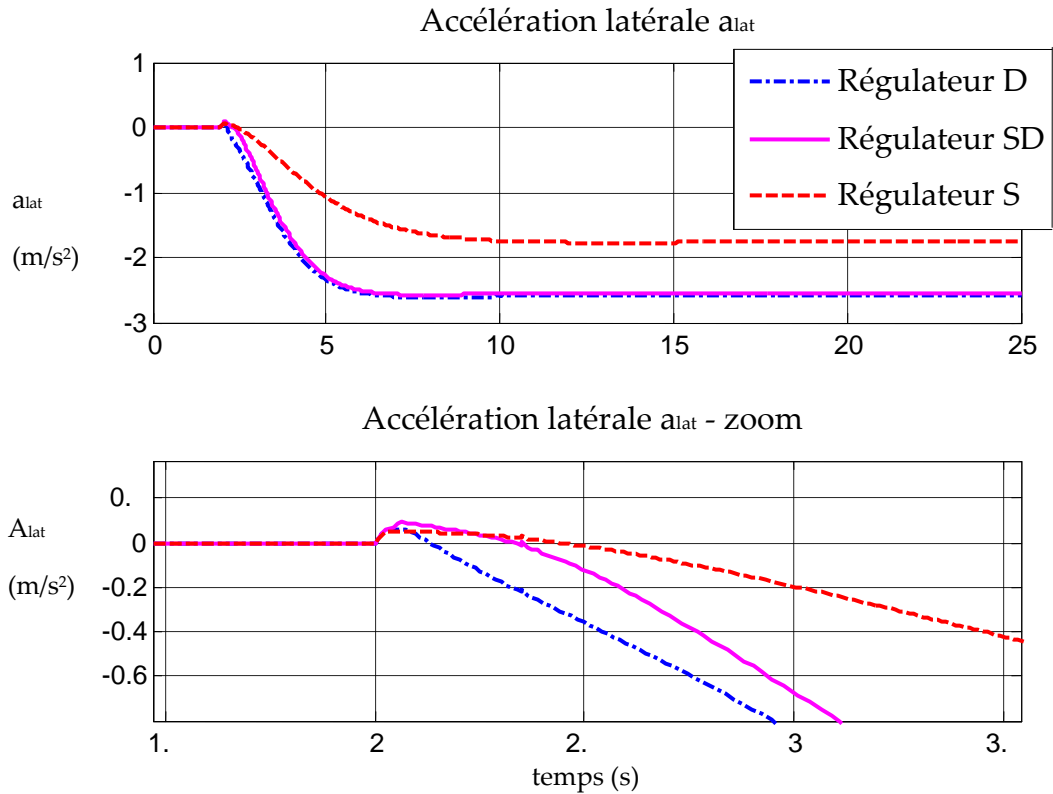


Figure 5.7 : Accélération latérale due au mouvement curviligne (circulaire)

Sur les Figure 5.3 à Figure 5.7 nous pouvons voir que :

- L'angle de braquage du **régulateur D** est tel que  $\delta = \delta_{cond} / \delta_r = 0$ , et le comportement du système en boucle fermée est identique au comportement du **régulateur 4 DTC**, développé dans le chapitre 4.
- L'angle de braquage du **régulateur SD** est modulé par  $\delta_r$ , la trajectoire du véhicule s'écartant un peu de la trajectoire désirée. Le contre braquage est visible sur la Figure 5.3, et son effet sur la trajectoire est visible sur la Figure 5.6. En contre partie, l'effet est bien favorable au niveau de la minimisation de l'accélération latérale ainsi que la minimisation du couple en phase transitoire.
  - L'accélération latérale est réduite de 85%, sa valeur maximale passant de 0.3 à 0.02m/s².
  - Le couple de l'actionneur est réduit de 60%, sa valeur maximale passant de 50 à 20 Nm.

- Les pondérations du **régulateur S** rapprochent le comportement du système du comportement STC. Dans ce cas, nous pouvons voir que le couple d'inclinaison est nul  $M_i = 0$ , et l'inclinaison est réalisée grâce au contre braquage, qui est plus important qu'en contrôle SDTC. L'accélération latérale perçue est également réduite. Il est intéressant de noter qu'elle est transitoirement de signe opposé à l'accélération obtenue en DTC, à cause du contre braquage (Figure 5. 4). La contre partie est que la trajectoire s'écarte significativement de la trajectoire désirée par le conducteur, et que  $\delta_r \neq 0$  même en régime asymptotique.
- L'angle d'inclinaison du véhicule est adapté à chaque fois à la trajectoire. Nous obtenons dans les trois cas l'inclinaison nominale qui assure  $a_{per}$  nulle. Les états du système aussi sont modifiés en fonction de la trajectoire.

Il apparait finalement que le régulateur SD est très performant, et que la méthode de conception proposée permet un réglage fin quant au curseur entre les solutions DTS et STC. Reste à vérifier la robustesse, du SD notamment.

### 3.3. Etude de la robustesse – marges de module et de retard multivariables

Le régulateur SD est multivariable. Intéressons nous dès lors aux marges multivariables du système bouclé, et précisément aux marges de module et de retard en entrée, évaluées sur la base des travaux de (Huang & Zhou 1999) et (Cluzel 2000). Pour réduire le conservatisme du calcul des marges de robustesse, les auteurs proposent d'utiliser la valeur singulière structurée  $\mu$ .

Une attention particulière est nécessaire pour l'évaluation des marges en entrée de ce système. Les deux entrées de commande sont d'ordres de grandeur différents :  $\delta_r$  de l'ordre  $10^{-1}$  et  $M_i$  de l'ordre de  $10^1$ . Ainsi, la première étape afin de réduire le pessimisme lié au mode de calcul des marges est la mise à l'échelle des deux signaux à l'aide des deux facteurs d'échelle  $h_1$  et  $h_2$ .

Définissons pour cela la matrice  $M$  :

$$M = \begin{bmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

Soient  $G$  la matrice de transfert du modèle du véhicule, et  $K$  celle du régulateur, le transfert de boucle considéré sera :

$$L_u = MKGM^{-1}$$

Nous appuyant sur l'ordre de grandeurs des signaux de commande (et donc des gains du régulateur ; cf. Tableau 5. 2), nous avons retenu les facteurs d'échelle  $h_1$  et  $h_2$  suivant.

Régulateur	$h_1$	$h_2$	Marge de module	Marge de retard
D	1000	1	1	+/- 0.102 s
SD	100	1	1	+/- 0.147 s
S	30	1	0.9987	+/-0.053 s

**Tableau 5. 3: Marges de stabilité du régulateur MIMO**

Rien d'étonnant à ce que nous trouvions une marge de module unitaire, ceci étant caractéristique des commande  $H_2$  dans le cas LTR. Les marges de retard aussi sont largement suffisantes, et permettent de conclure à une bonne robustesse vis-à-vis de retards parasites conséquents voire de dynamiques négligées.

#### 4. $\mu$ -analyse - Robustesse de la commande vis-à-vis de la variation de la masse.

Ce paragraphe expose les résultats de robustesse paramétrique obtenus par  $\mu$ -analyse (cf. Chapitre 47) du système en boucle fermée. D'après le théorème des petits gains généralisé, vérifier la robustesse de la stabilité de la boucle fermée, revient à vérifier que  $\mu_{\underline{\Delta}}(M(j\omega)) \leq 1$ , avec  $M(s)$  et l'ensemble structuré  $\underline{\Delta}$  correctement définis (la décomposition  $M - \Delta$  distingue partie certaine et incertitudes). L'incertitude considérée en premier lieu porte sur la masse  $m$  (la matrice d'incertitude  $\Delta$  obtenue par manipulation de LFR comprend les incertitudes sur  $m$  du modèle du système en boucle fermée).

Les bornes inférieure et supérieure de  $\mu_{\underline{\Delta}}(M(j\omega))$  sont obtenues en considérant une variation de masse de 50% pour chacun des **régulateur D, SD et S**. Notons que les facteurs de mise à l'échelle  $h_1$  et  $h_2$  évoqués dans le paragraphe précédent (paragraphe 3.3) sont pris en considération pour ces calculs. Les résultats sont présentés sur les Figure 5. 8 à Figure 5. 10.

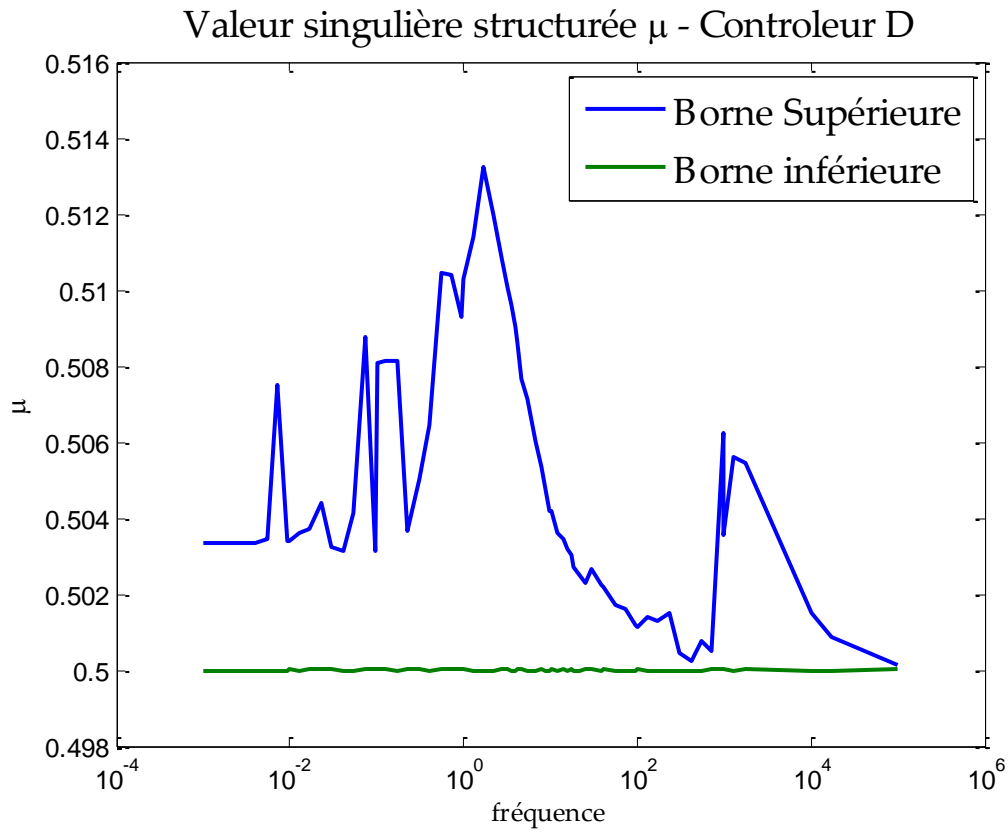


Figure 5. 8 : Etude de la robustesse de la stabilité du régulateur D, pour des variations de la masse allant jusqu'à 50%.

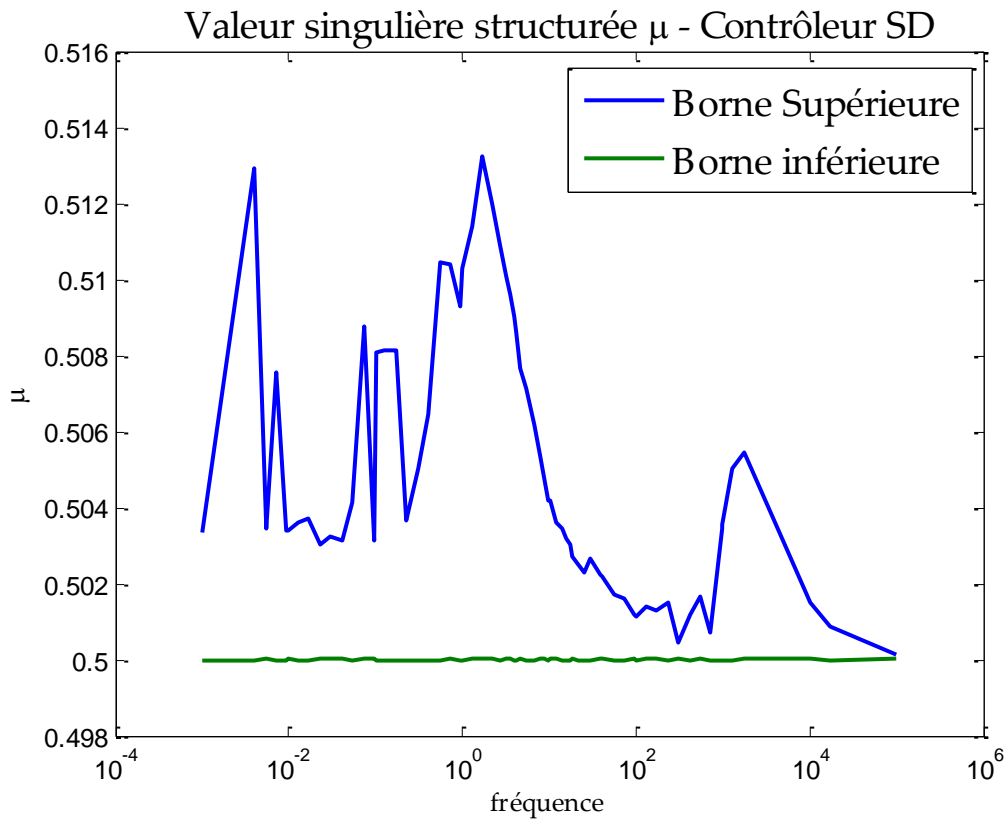


Figure 5. 9 : Etude de la robustesse de la stabilité du régulateur SD, pour des variations de la masse allant jusqu'à 50%.

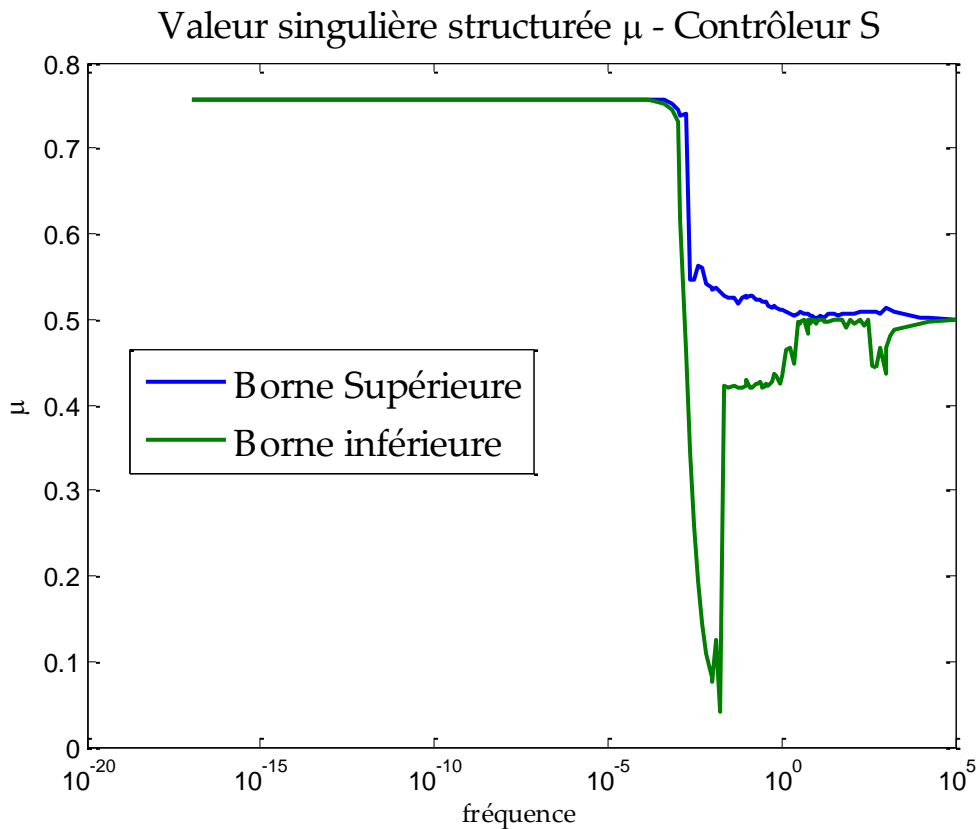


Figure 5. 10 : Etude de la robustesse de la stabilité du régulateur S, pour des variations de la masse allant jusqu'à 50%.

Les Figure 5. 8 à Figure 5. 10 montrent que la valeur de  $\mu$  est toujours inférieure à 1. Elle est inférieure à 0.52 pour les **régulateurs D** et **SD**, et de l'ordre de 0.77 pour le **régulateur S**. La robustesse vis-à-vis de telles variations de la masse est ainsi garantie dans les 3 cas, même si le cas STC pur semble plus affecté.

Le système est également robuste vis-à-vis des variations de vitesse longitudinale ; la  $\mu$  – analyse montre que la stabilité du linéarisé tangent est obtenue pour une variation de vitesse de  $\pm 48\%$ . La vitesse étant variable dans le temps, nous proposons cependant une analyse de performance LPV dans le paragraphe suivant.

## 5. Contrôleur paramétré par la vitesse longitudinale du véhicule

De même que pour le régulateur DTC, nous calculons dans ce paragraphe un régulateur variable en fonction de la vitesse longitudinale pour avoir des résultats satisfaisants dans toutes les conditions de circulation relatives à  $V_x$ . La stratégie d'interpolation utilisée pour le

cas DTC (Chapitre 48.1) est reprise ici. Le régulateur recherché, fonction de  $V_x$  et  $1/V_x$ , est de la forme :

$$R(V_x) = K_c + K_v V_x + K_{1/v} / V_x \quad (5.5)$$

Où  $K_c$ ,  $K_v$  et  $K_{1/v}$  sont donnés par la résolution de l'équation aux moindres carrés :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & V_1 & 1/V_1 \\ 1 & V_2 & 1/V_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & V_{17} & 1/V_{17} \end{pmatrix}}_M \underbrace{\begin{pmatrix} K_c \\ K_v \\ K_{1/v} \end{pmatrix}}_{R_v} = \underbrace{\begin{pmatrix} R_{v1} \\ R_{v2} \\ \dots \\ R_{v17} \end{pmatrix}}_{R_v} \Rightarrow \begin{pmatrix} K_c \\ K_v \\ K_{1/v} \end{pmatrix} = (M^T M)^{-1} M^T R_v \quad (5.6)$$

avec  $[V_1, V_2, \dots, V_{17}] = [2, 3, \dots, 18]$

L'étude de la robustesse du système en boucle fermée est réalisée *a posteriori*, comme au chapitre 4 pour le système DTC. Nous calculons en premier lieu pour les vitesses  $V \in \Omega = \{2, 3, \dots, 18\} \text{ m/sec}$ , la norme  $\|H\|_2$  du transfert  $\|T_{zw}\|_2$  entre l'entrée de perturbation  $w$  et les sorties pondérées à minimiser  $z$ . Nous comparons les résultats obtenus avec les 3 **régulateurs D, S et SD**, que l'on notera  $R_v^D$ ,  $R_v^S$  et  $R_v^{SD}$  respectivement calculés pour chaque vitesse  $V_x$  et les régulateurs interpolés  $R^D(V_x)$ ,  $R^S(V_x)$  et  $R^{SD}(V_x)$ . Les résultats sont représentés sur les Figure 5. 11 à Figure 5. 13. Ces figures montrent que l'approximation est acceptable, et que la stabilité et les performances sont garanties pour chaque vitesse  $V \in \Omega = \{2, 3, \dots, 18\} \text{ m/sec}$ . Nous cherchons alors à évaluer la norme 2 maximale de l'énergie de la sortie  $z$  en utilisant les algorithmes développés dans (A Bouali et al. 2008). Les résultats sont reportés dans le Tableau 5. 4.

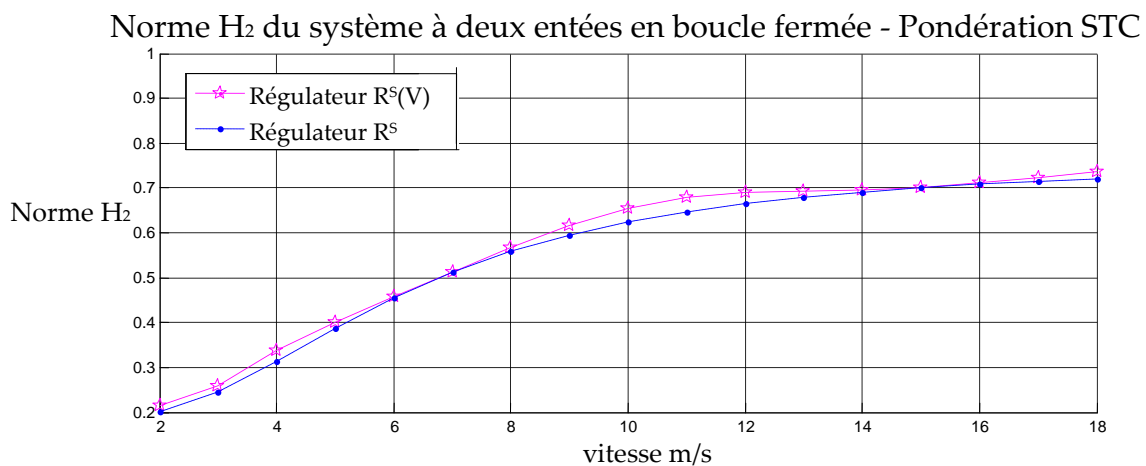


Figure 5. 11 : Régulateur S



### Norme $H_2$ du système à deux entrées en boucle fermée - Pondérations DTC

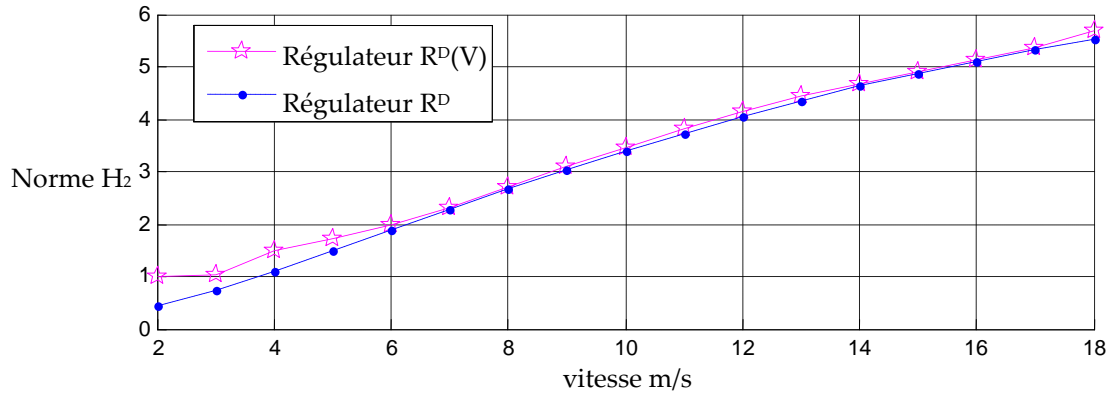


Figure 5.12 : Régulateur D

### Norme $H_2$ du système à deux entrées en boucle fermée - Pondérations SDTC

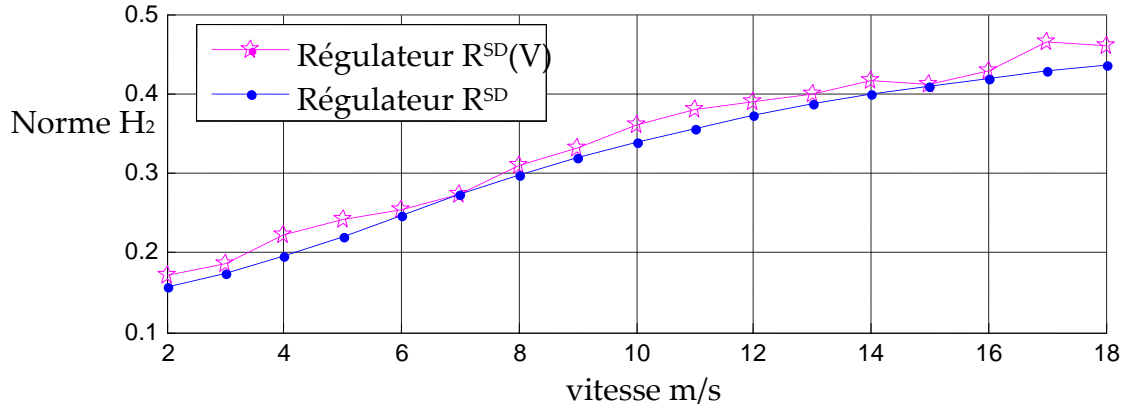


Figure 5.13 : Régulateur SD

Cet algorithme cherche à retrouver une fonction de Lyapunov garantissant la stabilité sur l'intervalle de vitesse donné. Bien que cette fonction de Lyapunov soit potentiellement dépendant des paramètres, l'algorithme reste conservatif, et aucune fonction de Lyapunov n'a été trouvée qui aurait permis de conclure à la stabilité du système global équipé du régulateur **SD** sur toute la plage de vitesse admissible. Le Tableau 5. 4 présente malgré tout les résultats des 3 régulateurs pour des intervalles de vitesse plus petits. La 3ème colonne précise l'énergie maximale garantie pour  $z$  pour des variations même rapides de vitesse ; elle est comparée avec la valeur maximale de la norme  $\|z\|_2$ , obtenue pour le système en boucle fermée contrôlé par  $R(V)$  (cf. Figure 5.11 à Figure 5.13).

- **Régulateur D** : un résultat a pu être trouvé pour tout l'intervalle  $V \in \Omega$ , et la valeur  $\max \|z\|_2$  est identique à celle trouvée pour le cas du système DTC (chapitre 4).

- **Régulateur S et SD** : aucune fonction de Lyapunov valable sur tout l'intervalle  $\Omega$  n'a été trouvée. Cependant la stabilité est garantie sur des intervalles qui se chevauchent et recouvrent tout  $\Omega$ .

Pondérations	Intervalle de $V$ (m/s)	Energie max de $\ z\ _2$	$\max \ H\ _2$ (Figure 5. 11 à Figure 5. 13)
Régulateur D	[2,18]	54.7068	6.2364
Régulateur S	[9,18]	1.5237	0.7355
	[2,10]	12.2062	
	[5,10]	1.0465	
	[2,6]	1.7371	
Régulateur SD	[2,6]	3.1968	0.5152
	[5,10]	1.3237	
	[5,14]	11.5193	
	[9,18]	1.1764	

**Tableau 5. 4 : Borne supérieure de l'énergie en sortie du système en boucle fermée avec différents régulateurs et sur différents intervalles.**

### 5.1. Etude des performances en simulation

Les performances du régulateur SD étant très satisfaisantes à vitesse constante, nous nous intéressons ici au comportement du régulateur interpolé. Nous comparerons alors les performances des régulateurs suivants, (Les pondérations des régulateurs SD et D se trouvent dans le Tableau 5. 1) :

- **Régulateur SD<sub>s</sub>**, à vitesse constante  $V = 8m / sec$ ,
- **Régulateur SD<sub>i</sub>**, paramétré par la vitesse, obtenu par interpolation
- **Régulateur D<sub>i</sub>**, paramétré par la vitesse, obtenu par interpolation. Ce régulateur a un comportement similaire au **régulateur 4**, du système DTC.

Le même scénario qu'au paragraphe Chapitre 46.1 est considéré ici. Le profil de la vitesse est illustré par la Figure 5. 14. Pour pouvoir imposer le profil de vitesse désiré, nous simulons le

modèle non linéaire latéral (ref). Les résultats des simulations sont illustrés sur les Figure 5. 15 à Figure 5. 17.

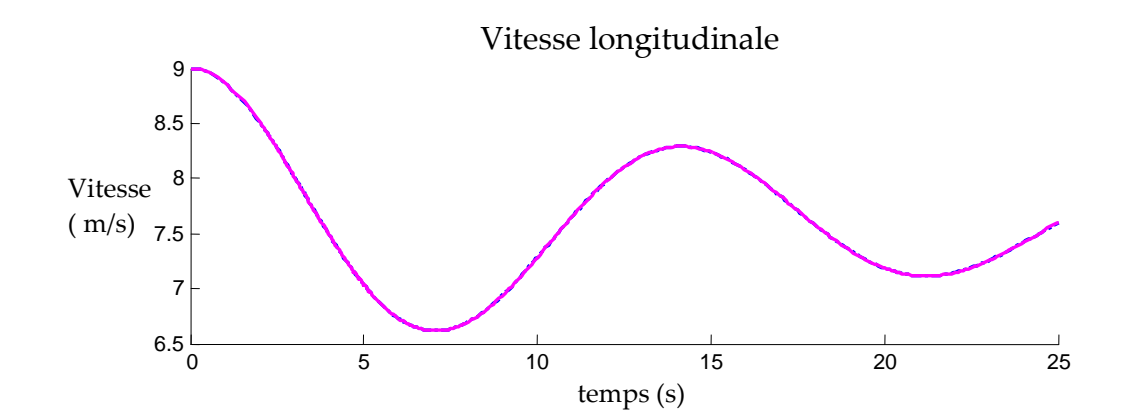


Figure 5. 14 : Vitesse longitudinale variable

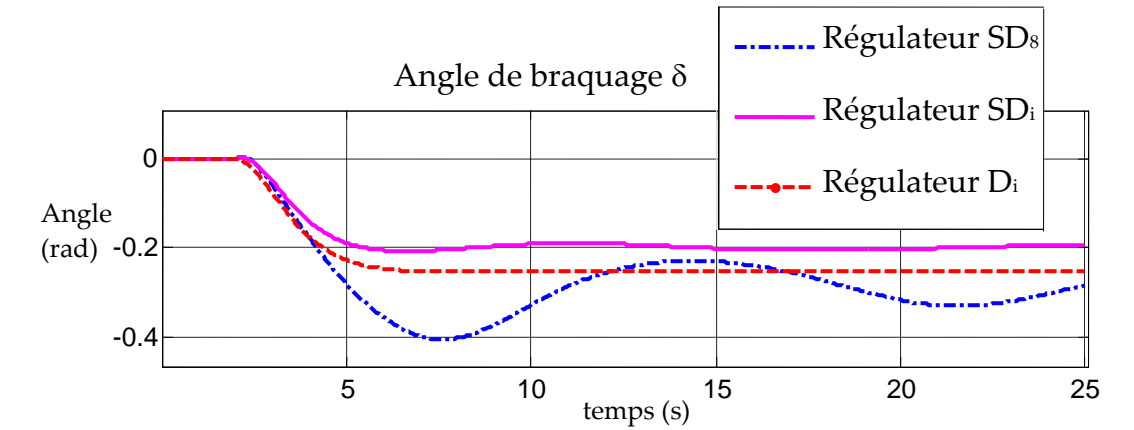


Figure 5. 15 : Angle de braquage appliqué au véhicule

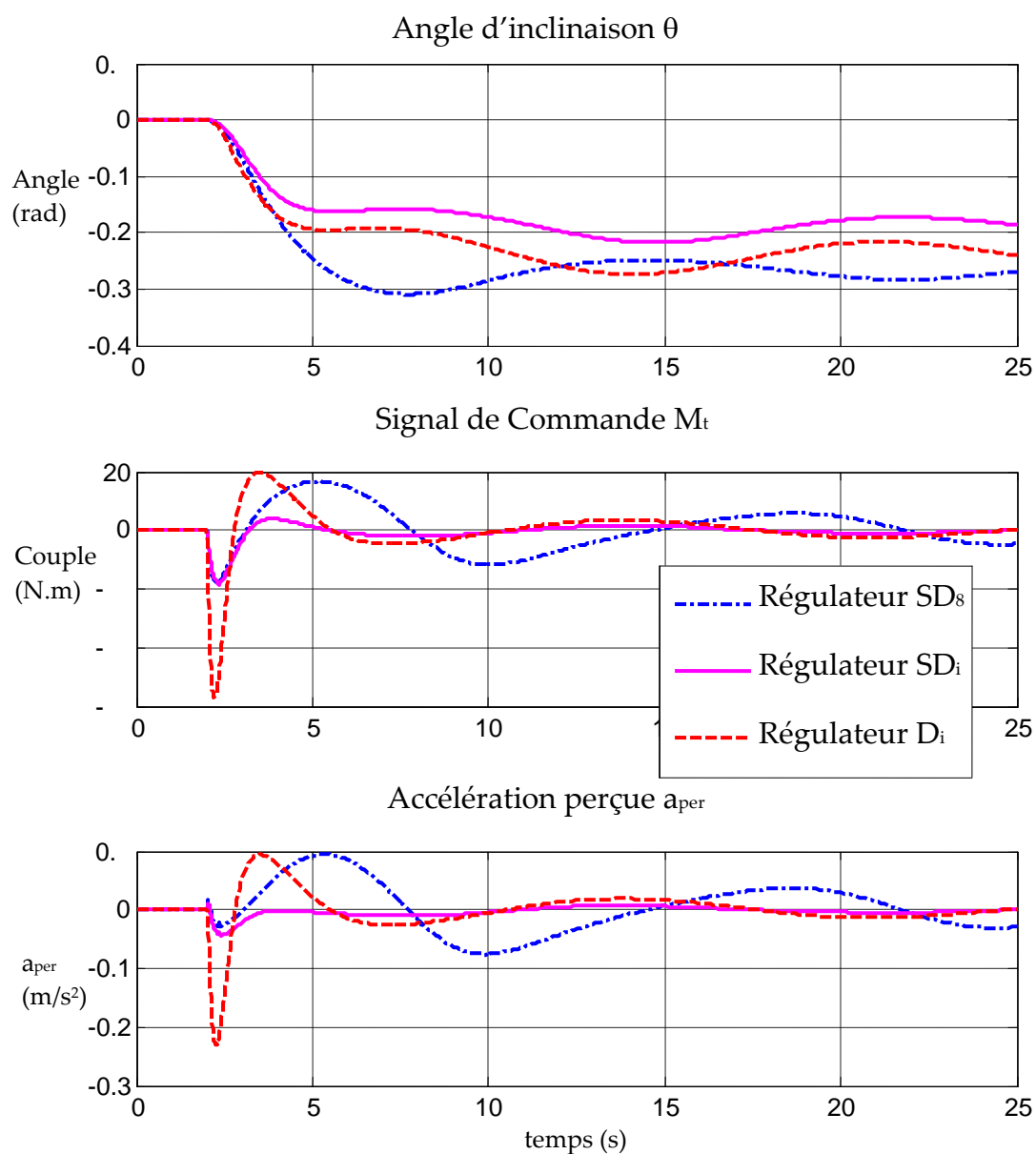


Figure 5. 16 : Angle d'inclinaison du véhicule, signal de commande et accélération perçue.

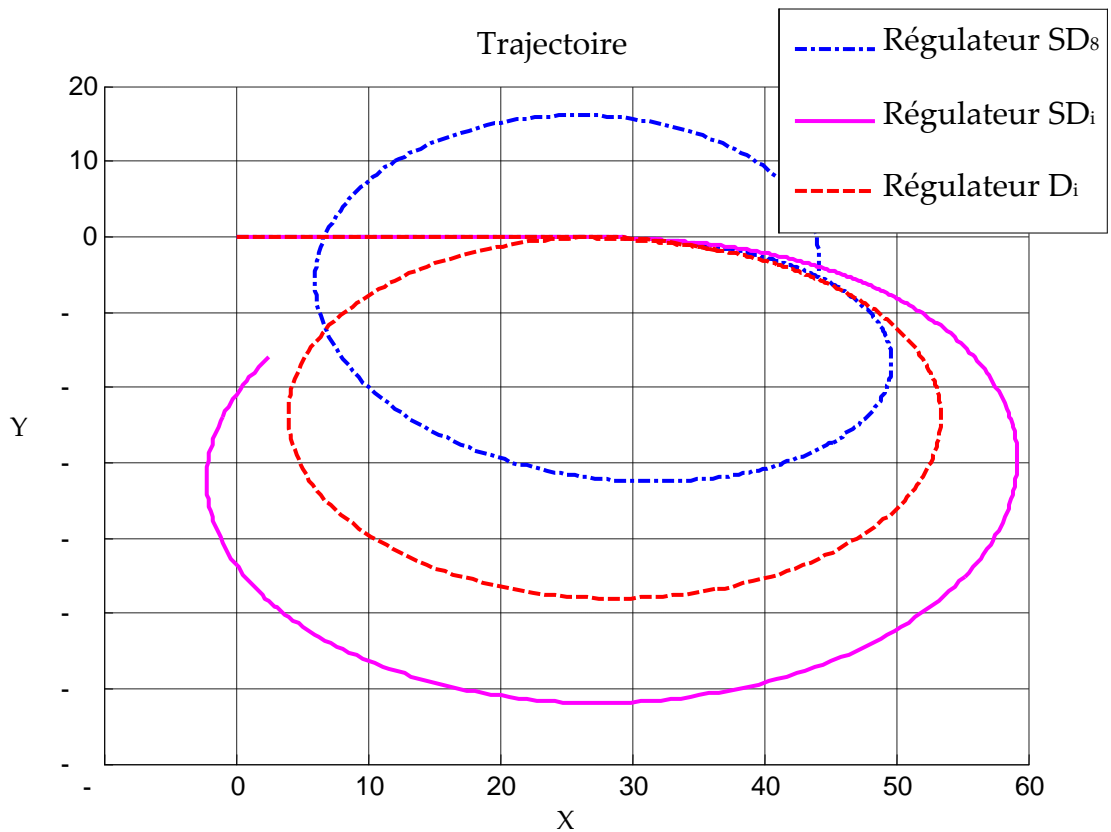


Figure 5. 17 : Trajectoire correspondante du véhicule

Ces résultats montrent que :

- Comme prévu, les performances du régulateur SD<sub>i</sub> dépendant de la vitesse sont meilleures que celles du Régulateur SD<sub>8</sub> à vitesse constante quant-à la minimisation de  $a_{per}$  et de  $M_t$ . Les trajectoires résultantes sont aussi différentes.
- En comparant régulateur SD<sub>i</sub> et régulateur D<sub>i</sub>, nous retrouvons le même compromis entre performances et suivi de trajectoire. L'accélération perçue et le couple de commande ont de plus petites valeurs, mais le rayon de courbure de la trajectoire est plus grand. L'évaluation de cet écart doit prendre en compte plusieurs faits :
  - La capacité du conducteur (ou pas) à s'adapter à ce phénomène et à la conduite de ce genre de véhicules, en agissant comme un correcteur et appliquant un angle de braquage plus grand que celui qu'il aurait besoin d'appliquer dans un véhicule DTC pour suivre une même trajectoire.
  - La possibilité d'adapter le facteur de réduction de l'angle au volant, de sorte à avoir deux trajectoires similaires avec un même  $\delta_{cond}$  dans les véhicules DTC et SDTC. Ceci est simple s'il s'avère que l'écart est proportionnel à l'angle de braquage quelque soit la vitesse, i.e.  $\delta_r = K_{\delta-p} \delta_{cond}$ , avec  $K_{\delta-p}$  constante, pour toute vitesse  $V$ .

En adoptant une de ces deux solutions, Le régulateur SDi aura alors de très bonnes performances.

## 6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressé aux possibilités offertes par l'utilisation conjointe de systèmes DTC et STC pour accroître la stabilité latérale des VEI à moindre coût énergétique. Le couple d'inclinaison  $M_i$  et la modulation de l'angle de braquage  $\delta_r$  sont les deux entrées de commande permettant d'agir sur l'accélération latérale perçue. Réduire la stabilité latérale n'est pas le seul enjeu. Il importe aussi de respecter la volonté du conducteur en termes de suivi de trajectoire. La stratégie de synthèse proposée se place dans le cadre d'une coopération permanente entre systèmes STC et DTC, ce qui d'une part évite les difficultés mentionnées dans la littérature, engendrées par la commutation entre les deux systèmes, et d'autre part permet d'améliorer significativement les performances. La méthodologie proposée au chapitre 4 est de nouveau adoptée, permettant la conception d'un régulateur structuré sur la base du modèle linéarisé du véhicule et d'un problème  $H_2$  *ad hoc*. Elle se révèle ici une nouvelle fois pertinente, d'autant qu'elle permet par choix d'un simple paramètre de réglage, d'obtenir toute solution intermédiaire entre un régulateur n'exploitant que l'actionneur STC (couple  $M_i$  nul), à un régulateur n'exploitant que l'actionneur DTC ( $\delta_r$  nul). Le régulateur SD retenu agit simultanément sur les deux moyens d'action et améliore significativement les performances d'ensemble : l'accélération perçue est réduite de 85% et le couple d'inclinaison réduit de 60% par rapport au contrôleur DTC. La trajectoire du véhicule s'écarte assez peu de la trajectoire obtenue avec un régulateur DTC pour que nous estimions que le conducteur parviendra sans gêne à assurer le suivi de trajectoire. Les marges de robustesse multivariables (marges de module et de retard) sont satisfaisantes, et le système est robuste vis-à-vis des variations de la masse. Enfin, la dernière partie du chapitre a concerné la synthèse d'un régulateur paramétré par la vitesse longitudinale du véhicule. Ce dernier s'avère performant, et l'étude *a posteriori* de sa stabilité montre qu'il conserve de bonnes propriétés de robustesse. Le chapitre suivant s'intéresse toujours au même système SDTC, mais l'aborde par le biais de lois de commande non linéaires.

## Chapitre 6 Approche NL : commande par platitude des systèmes SDTC

---

### 1. Introduction

Les lois de commande linéaires sont les plus répandues parmi les stratégies de commande mises en œuvre. C'est qu'elles sont arrivées à un degré de développement élevé, et offrent un grand nombre d'outils permettant de définir et d'étudier de façon systématique les propriétés du système : localisation des pôles, stabilité, performances, robustesse en stabilité et en performance vis-à-vis des incertitudes de modélisation (incertitudes paramétriques, dynamiques négligées, ...).

De son côté, le corpus de connaissances sur la commande non linéaire progresse lui aussi, même si l'étude des systèmes Non Linéaires (NL) amène un net surcroît de complexité : perte des outils relevant de l'analyse fréquentielle (fonctions de transfert, Nyquist, mu-analyse, etc.), de la simplicité d'analyse de la stabilité (un système non-linéaire possède en général plusieurs points d'équilibre et le concept de stabilité n'est plus nécessairement global contrairement au cas linéaire). En revanche, la commande non linéaire peut s'avérer plus efficace, puisque le modèle de synthèse est valable en tout point de fonctionnement du système, et non pas restreint au voisinage d'un point d'équilibre donné. Pour cette raison, le modèle du véhicule étant non linéaire vis-à-vis de l'angle d'inclinaison, nous cherchons à concevoir une commande elle-même non-linéaire dans l'espoir d'obtenir un comportement encore amélioré aux grands mouvements. Nous nous intéressons plus précisément à la commande par platitude.

Les systèmes non-linéaires dits *plats* forment une sous-classe intéressante (Fliess et al. 1995). Ces systèmes ont la propriété d'être linéarisables par bouclage. On peut ainsi par des manipulations algébriques *ad hoc* (retour d'état et redéfinition des sorties), obtenir un nouveau système avec des relations entrées/sorties linéaires, sur lequel les outils du *Linéaire* peuvent s'appliquer. L'étape de linéarisation a l'inconvénient d'effacer la dynamique naturelle et la paramétrisation *physique* du système originel. Nous veillerons pour autant à adopter une démarche conduisant à une loi de commande non-linéaire robuste.

Dans ce chapitre, nous définissons d'abord la notion de platitude, et exhibons des sorties plates pour le modèle du véhicule. Le sens physique des sorties plates identifiées n'est pas toujours évident. Nous analysons alors ces sorties pour trouver leur un sens physique.

La synthèse de la commande non linéaire constitue la fin du chapitre et comporte deux étapes : 1/ la linéarisation par bouclage à l'aide d'un compensateur non linéaire, et 2/ la conception du régulateur externe pour ce modèle de la boucle interne ainsi linéarisée ; Nous proposons une commande externe préliminaire à base de régulateurs PID.

## 2. Systèmes plats – rappel théorique

### 2.1. Quelques définitions utiles

#### Définition 1

le *degré relatif* d'une sortie scalaire  $y_i$  est le nombre de dérivations temporelles successives minimales  $r_i$  d'une sortie  $y_i$  engendrant l'apparition d'une entrée dans l'expression ; il s'agit en d'autres termes du plus petit entier  $r_i$  tel que  $\frac{\partial y_i^{(r_i)}}{\partial u} \neq 0$ .

#### Définition 2

##### *difféomorphisme*

Soient :

- $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés réels de dimension finie,
- $U$  un ouvert de  $E$ ,  $V$  un ouvert de  $F$ ,
- $f$  une application de  $U$  dans  $V$ .

On dit que  $f$  est un difféomorphisme si

- $f$  est bijective,
- $f$  est différentiable sur  $U$ ,
- sa réciproque est différentiable sur  $V$ .

$E$  et  $F$  sont alors isomorphes, donc de même dimension.

#### Définition 3

La *Dérivée de Lie* généralise aux variétés différentielles la notion de dérivée directionnelle d'une fonction numérique.

$$L_f g(x) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x)$$

Et définissons aussi la notation suivante :



$$\partial_x F = \frac{\partial F}{\partial x}.$$

## 2.2. Systèmes différentiellement plats

On considère dans ce qui suit les systèmes dont l'évolution est décrite par le système d'équations algébro-différentielles :

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (6.1)$$

avec  $x \in R^n$ ,  $u \in R^m$ ,  $f$  étant une fonction régulière.

Tout système n'est pas plat. Un système est dit plat si toutes les variables d'état et les variables de commande du système peuvent s'exprimer en fonction de sorties ayant certaines caractéristiques que l'on définira ultérieurement et s'appellent 'sorties plates', et d'un nombre

En d'autres termes, un système explicite de la forme  $\dot{x} = f(x, u)$ ,  $x \in R^n$  à  $m$  entrées ( $u \in R^m$ ) (cf. équation (6.1)) est dit **plat** si et seulement si il existe :

- une sortie dite plate  $y$  de dimension  $m$ ,
- un entier  $r$  et des applications :
  - $\varphi: R^n \times (R^m)^{r+1} \rightarrow R^m$  de rang  $m$ ,
  - $\phi': (R^m)^r \rightarrow R^n$  de rang  $n$ ,
  - $\psi: (R^m)^{r+1} \rightarrow R^m$  de rang  $m$ ,

tel qu'on puisse écrire :

$$\begin{aligned} y &= (y_1, y_2, \dots, y_m) = \varphi(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(r)}), \\ x &= \phi'(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)}), \\ u &= \psi(y, \dot{y}, \dots, y^{(r)}) \end{aligned} \quad (6.2)$$

fini de leurs dérivées sans intégration des équations différentielles (Fliess et al. 1992).

Cela revient à dire que le vecteur de sorties plates « résume » en un certain sens la totalité du comportement dynamique du système. Le système est donc observable et ne contient pas de zéros (de transmission).

### 2.2.1. linéarisation entrées/états

La linéarisation entrées/états consiste à transformer le système NL plat de la Figure 6. 1, à l'aide d'un compensateur non-linéaire, en un système équivalent à des chaînes d'intégrateurs indépendantes, (cf. Figure 6. 2). Cette linéarisation entrées/états permet la maîtrise de toutes les

dynamiques du système (*idem* commandabilité pour un système linéaire). Elle conduit à un système aux variables parfaitement découplées, contrairement à la linéarisation entrées/sorties (ou linéarisation partielle), qui induit en boucle fermée la présence de dynamiques cachées/inobservables susceptibles d'être instables (dynamiques de zéros), et un possible couplage entre les variables (Conte et al. 2007).

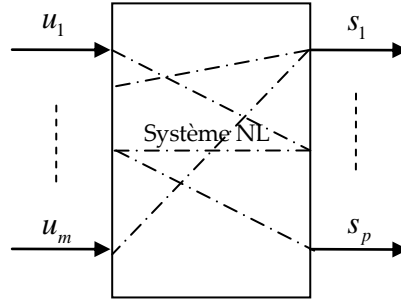


Figure 6.1 : Système Non Linéaire, avec ses entrées de commande  $u$  et ses sorties physiques  $s$  non plates

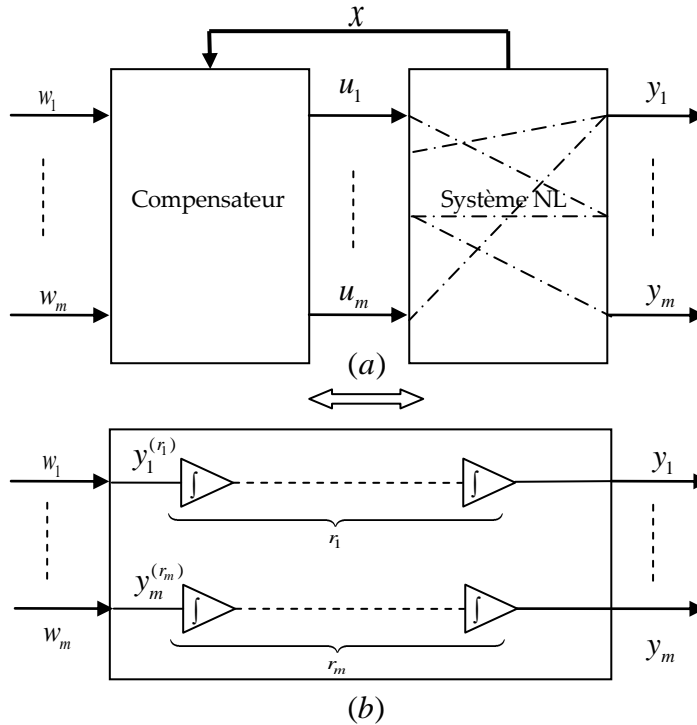


Figure 6.2 : Linéarisation entrées/états par bouclage

Le système NL plat d'ordre  $n$ , ayant  $m$  entrées  $u$  et  $p$  sorties  $s$ , après linéarisation devient un système à  $m$  nouvelles entrées  $w$  et  $m$  nouvelles sorties  $y$ . Chaque nouvelle entrée  $w_i$ ,  $i = 1..m$  est reliée par une chaîne de  $r_i$  intégrateurs à la sortie  $y_i$ ,  $r_i$  étant le degré relatif de la sortie plate  $y_i$  et donc  $w_i = y_i^{(r_i)}$ .

Le nombre total d'intégrateurs  $n_p$  dans le système linéarisé (comprenant le système NL d'ordre  $n$  et compensateur d'ordre  $n_c$ ) est  $n_p = n + n_c$ . Lorsque le compensateur est statique *i.e.*  $n_c = 0$

le système linéarisé est du même ordre que le système initial. Il vient alors que  $\sum_{i=1}^m r_i = n_p = n$ .

Dans ces conditions une des propriétés des  $m$  sorties plates est que la somme de leur degré relatif est égale à l'ordre du système en boucle ouverte (Martin et al. 2003).

Lorsque le compensateur est statique (i.e.  $n = n_p$ ), le système linéarisé s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{z} = A_z z + B_z w \\ y = C_z z \end{cases} \quad (6.3)$$

Avec  $z \in R^n, w \in R^{m \times 1}$  et les matrices  $A_z, B_z, C_z$  de la forme :

$$A_z = \begin{bmatrix} A_{z11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{z22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{zmm} \end{bmatrix}, B_z = \begin{bmatrix} B_{z11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_{z22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & B_{zmm} \end{bmatrix}, C_z = \begin{bmatrix} C_{z11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_{z22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & C_{zmm} \end{bmatrix}$$

$$\text{avec, } A_{zii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & (0) \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{bmatrix}_{r_i \times r_i}, B_{zi} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{r_i \times 1}, C_{zi}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{r_i \times 1}.$$

Cette linéarisation permet donc d'obtenir un système linéaire et découplé (6.3), où les variables de sortie sont exprimées en fonction des grandeurs d'entrée, possédant tous ses pôles à l'origine.

### 2.3. Recherche des sorties plates

La difficulté majeure dans le contexte de la commande par platitude réside dans le fait qu'il n'existe pas, dans le cas général, une démarche systématique permettant de déterminer les sorties plates d'un système. Les outils théoriques disponibles permettent uniquement de vérifier si un vecteur de sorties donné est constitué ou non des sorties plates. D'autre part, les résultats de la littérature abordent majoritairement le cas où les systèmes NL sont affines par rapport aux entrées, i.e. qui peuvent s'écrire sous la forme  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ , ce qui n'est pas le cas du modèle véhicule (cf. équation 2.9).

Nous démontrerons que ce modèle (modèle bicycle avec dynamiques latérales et longitudinales – équation (2.9)) est plat, et définirons un retour d'état statique (i.e.  $n_c = 0$ ) linéarisant.

Dans ces conditions, le problème se pose de la façon suivante :

**Problème 6.1:** Etant donné le système NL :  $\dot{x} = f(x, u)$ ,  $x \in R^n$ ,  $u \in R^m$  (cf. équation (6.1))

Si il existe un *changement de variables*  $z = \phi(x)$ ,

- i) pour lequel  $\phi$  est un *difféomorphisme* et  $z$  contient les  $m$  **sorties plates**  $y_i$  et leur dérivées jusqu'au degré  $r_i - 1$ , i.e.  $z = [y_1, \dot{y}_1, \dots, y_1^{(r_1-1)}, \dots, y_m, \dot{y}_m, \dots, y_m^{(r_m-1)}]^T$
- ii) et que la *matrice de découplage*  $M_D = \left[ \frac{dy_i^{(r_i)}}{du} \right]_{i=1, \dots, m}$  est de rang plein ( $\text{rang}(M_D) = m$ ),

alors les sorties  $y_i$  constituent les sorties plates.

Pour obtenir ensuite le système linéarisé, il faut calculer le compensateur (cf. Figure 6. 2), et donc trouver une commande  $u = \alpha(x, w)$ , tel que le système  $\dot{x} = f(x, u)$  bouclé par le compensateur s'écrive  $\dot{z} = A_z z + B_z w$  (cf. equation(6.3)) avec la paire  $(A_z, B_z)$  commandable.

### 3. Sorties plates du modèle à 5DDL

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux systèmes SDTC, et considérons le modèle véhicule à 5DDL comprenant les dynamiques latérales et longitudinales (cf. équation 2.10). Il est régi par l'équation d'évolution  $\dot{x} = f(x, u)$ , avec  $x = [v, \beta, r, \theta, \dot{\theta}]^T$  et les entrées de commande  $u = [\delta, F_l, M_t]$ , où  $F_l$  représente la force de propulsion ou de traction longitudinale du véhicule, qui est une entrée du conducteur lui permettant de contrôler la vitesse  $V_x$ .

Dans notre travail, nous nous sommes inspirés des résultats reportés dans (Fuchshumer 2005; Fuchshumer et al. 2005) ; les auteurs ont déterminé les sorties plates d'un modèle bicyclette à 3DDL, constitué des dynamiques dans le plan  $(x, y)$  uniquement.

Nous rappelons d'abord les équations non linéaires du modèle (2.9) de la forme  $\dot{x} = f(x, u)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{v} = \frac{1}{m} (F_{sf} \sin(\beta - \delta) + F_{lf} \cos(\beta - \delta) + F_{sr} \sin(\beta) + F_{lr} \cos(\beta)) \\ \quad - (h\ddot{\theta} \cos \theta - h\dot{\theta}^2 \sin \theta - g \sin \eta) \sin \beta \\ \dot{\beta} = -r + \frac{1}{mv} (F_{sf} \cos(\beta - \delta) - F_{lf} \sin(\beta - \delta) - F_{sr} \cos(\beta) + F_{lr} \sin(\beta)) \\ \quad - \frac{1}{v} (h\ddot{\theta} \cos \theta - h\dot{\theta}^2 \sin \theta - g \sin \eta) \cos \beta \\ \ddot{\psi} = \dot{r} = \frac{l_f}{J} (F_{sf} \cos \delta + F_{lf} \sin \delta) - \frac{l_r}{J} F_{sr} \\ \dot{\theta} = \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} = \frac{(mgh \sin \theta \cos \eta - mh\dot{\theta}^2 \cos \theta \sin \theta - (F_{sf} \cos \delta + F_{lf} \sin \delta + F_{sr})h \cos \theta + M_t + hF_s \sin^2 \theta)}{(I_x + mh^2 \sin^2 \theta)} \end{array} \right. \quad (6.4)$$

Avec :  $\begin{cases} F_{lr} = \gamma F_l \\ F_{lf} = (1 - \gamma) F_l \end{cases}$

Rappelons que le coefficient  $\gamma \in [0,1]$  détermine la nature de la propulsion avant ou arrière du véhicule. Le modèle est d'ordre  $n=5$ , et possède  $m=3$  entrées  $u$  ; par conséquent :

Pour prouver que le système est plat et linéarisable avec un compensateur statique, il faut trouver  $m=3$  sorties plates, constituant  $m=3$  chaînes d'intégrateurs indépendantes contenant au total  $n_p = n = 5$  intégrateurs.

En d'autres termes il faut trouver 3 sorties plates  $y = (y_1, y_2, y_3)$ , de degrés relatifs respectifs  $r_1, r_2$  et  $r_3$ , tels que :  $r_1 + r_2 + r_3 = 5$ .

**Proposition 6.1 :**

Soit la fonction continue:

$$T(v, \beta, r) = \frac{l_f + l_r}{ml_f} (v \partial_r F_{sr} + \partial_\beta F_{sr} \frac{J}{ml_f} \cos \beta + \partial_v F_{sr} v \frac{J}{ml_f} \sin \beta) - v^2 \cos \beta \quad (6.5)$$

$$\text{Soit encore : } \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos \beta \\ v \sin \beta - \frac{J}{ml_f} + h\dot{\theta} \cos \theta \\ \theta \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

**Alors** sous la condition  $T(v, \beta, r) \neq 0$ , le système est différentiellement plat pour  $v \neq 0$  et  $y_1, y_2, y_3$  constituent les sorties plates pour  $r_1 = 1$  et  $r_2 = r_3 = 2$ .

**Preuve :** Notons d'abord que les degrés relatifs de ces sorties  $y_1, y_2, y_3$  (6.6) sont respectivement  $r_1=1, r_2=2, r_3=2$ , (l'obtention des valeurs de  $r_1$  et  $r_3$  est directe, et le calcul de  $r_2$  est explicité au paragraphe 4.2 ci-dessous), d'où  $\sum_{i=1}^3 r_i = n = 5$ . Pour démontrer la validité de la *proposition*

6.1 ci dessus, donc démontrer que le système est plat, il suffit de :

➤ trouver un **changement de variable**  $z = \phi(x)$ , tel que  $\phi$  soit un difféomorphisme. Si  $z$  est le vecteur des sorties plates supposées et de leur dérivées jusqu'à  $r_i - 1$  alors  $z = [y_1, y_2, \dot{y}_2, y_3, \dot{y}_3]^T$

➤ démontrer que la **matrice de découplage**  $M_D = \frac{dy_i^{(r_i)}}{du}$  est de rang plein, ici donc :  $\text{rang}(M_D) = 3$ .

La partie suivante présente le détail des calculs associés à ces deux points.

### 3.1. Trouver le changement de variables difféomorphe

$\phi$  est un difféomorphisme local, si  $\det(J) = \det\left(\frac{\partial \phi(x_i)}{\partial x_j}\right) \neq 0$  avec  $i = 1..n, j = 1..n$ .

D'après (6.6), il est clair que:

$$z = \begin{bmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \\ z^4 \\ z^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_2 \\ y_3 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} = \phi(x) = \begin{bmatrix} c^1(x) \\ c^2(x) \\ L_f c^2(x) \\ c^3(x) \\ L_f c^3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos \beta \\ v \sin \beta - \frac{J}{ml_f} r + h \dot{\theta} \cos \theta \\ \frac{l_f + l_r}{ml_f} F_{sr} - vr \cos \beta \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Soit  $J = \left[ \frac{\partial \phi(x_i)}{\partial x_j} \right]_{i=1..n, j=1..n}$ . Vérifions que  $\det(J) \neq 0$ . On a :

$$J = \begin{bmatrix} \cos \beta & -v \sin \beta & 0 & 0 & 0 \\ \sin \beta & v \cos \beta & -\frac{J}{ml_v} & -h \dot{\theta} \sin \theta & h \cos \theta \\ l' \partial_v F_{sr} - r \cos \beta & l' \partial_\beta F_{sr} + rv \sin \beta & l' \partial_r F_{sr} - v \cos \beta & l' \partial_\theta F_{sr} & l' \partial_{\dot{\theta}} F_{sr} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ avec } l' = \left( \frac{l_f + l_r}{ml_f} \right)$$

Par suite :

$$\begin{aligned}
\det(J) &= \cos \beta \begin{vmatrix} v \cos \beta & -\frac{J}{ml_f} \\ l' \partial_\beta F_{sr} + rv \sin \beta & l' \partial_r F_{sr} - v \cos \beta \end{vmatrix} \\
&\quad - \sin \beta \begin{vmatrix} -v \sin \beta & 0 \\ l' \partial_\beta F_{sr} + rv \sin \beta & l' \partial_r F_{sr} - v \cos \beta \end{vmatrix} \\
&\quad + (l' \partial_v F_{sr} - r \cos \beta) \begin{vmatrix} -v \sin \beta & 0 \\ v \cos \beta & -\frac{J}{ml_f} \end{vmatrix} \\
\det(J) &= \cos \beta (v \cos \beta (l' \partial_r F_{sr} - v \cos \beta) + \frac{J}{ml_f} (l' \partial_\beta F_{sr} + rv \sin \beta)) \\
&\quad - \sin \beta (-v \sin \beta (l' \partial_r F_{sr} - v \cos \beta)) \\
&\quad + (l' \partial_v F_{sr} - r \cos \beta) v \sin \beta \frac{J}{ml_f} \\
\det(J) &= v \cos^2 \beta l' \partial_r F_{sr} - v^2 \cos^2 \beta \cos \beta + \frac{J}{ml_f} l' \partial_\beta F_{sr} \cos \beta + \frac{Jrv}{ml_f} \cos \beta \sin \beta \\
&\quad + v \sin^2 \beta l' \partial_r F_{sr} - v^2 \sin^2 \beta \cos \beta + l' \partial_v F_{sr} v \sin \beta \frac{J}{ml_f} - \cos \beta \sin \beta \frac{Jrv}{ml_f} \\
\det(J) &= vl' \partial_r F_{sr} + l' \partial_\beta F_{sr} \frac{J}{ml_f} \cos \beta + l' \partial_v F_{sr} v \frac{J}{ml_f} \sin \beta - v^2 \cos \beta
\end{aligned}$$

Par suite, la condition  $T(v, \beta, r) = \det(J) \neq 0$  exprime les points au voisinage desquelles  $\phi$  est un difféomorphisme local.

### 3.2. Calcul du rang de la matrice de découplage

La matrice de découplage s'écrit :

$$M_D = \begin{pmatrix} \frac{\partial \ddot{y}_1}{\partial \delta} & \frac{\partial \ddot{y}_1}{\partial F_l} & \frac{\partial \ddot{y}_1}{\partial M_t} \\ \frac{\partial \ddot{y}_2}{\partial \delta} & \frac{\partial \ddot{y}_2}{\partial F_l} & \frac{\partial \ddot{y}_2}{\partial M_t} \\ \frac{\partial \ddot{y}_3}{\partial \delta} & \frac{\partial \ddot{y}_3}{\partial F_l} & \frac{\partial \ddot{y}_3}{\partial M_t} \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

Pour pouvoir expliciter ce calcul, il est nécessaire de remplacer  $F_{sr}$  par son expression. En effet,  $\dot{y}_2 = z^3 = l' F_{sr} - vr \cos \beta$  dépend de  $F_{sr}$ , et par conséquent  $\ddot{y}_2$  de  $\dot{F}_{sr}(v, \beta, r)$ . Le remplacement de  $F_{sf}$  par son expression compliquerait en revanche inutilement le développement. Notons que nous utilisons afin de simplifier les calculs une expression de  $F_{sr}$  et surtout de  $F_{sf}$  inspirées de (Fuchshumer 2005; Fuchshumer et al. 2005), simplifiées en comparaison de celles

proposées dans le chapitre 2, (cf. équation 2.11). Notons néanmoins qu'une expression plus complète peut être utilisée, à condition qu'elle vérifie  $T(v, \beta, r) \neq 0$  (cf. (6.5)).

Les forces latérales s'écrivent :

$$\begin{cases} F_{sr}(v, \beta, r) = C_r \left( \frac{v \sin \beta - l_r r}{v \cos \beta} \right) \\ F_{sf}(\delta) = C_f \sin \delta \end{cases} \quad (6.9)$$

- calcul de la 1ère ligne de  $M_D$

partant de  $\dot{y}_1 = \dot{z}^1 = \frac{1}{m} (F_{lf} \cos \delta + F_{lr} - F_{sf} \sin \delta) + vr \sin \beta$  (6.10)

$$\rightarrow \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial \delta} = -\frac{1}{m} ((1-\gamma) F_l \sin \delta + F_{sf} \cos \delta)$$

$$\rightarrow \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial F_l} = \frac{1}{m} ((1-\gamma) \cos \delta + \gamma)$$

$$\rightarrow \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial M_t} = 0$$

- calcul de la 2ème ligne

partant de :

$$\begin{aligned} \ddot{y}_2 &= \ddot{z}^2 \\ \ddot{z}^2 &= \ddot{z}^3 = (1-\gamma) F_l \left( \frac{l' C_r}{\cos^2 \beta} \frac{\sin(\beta - \delta)}{mv} + \frac{v \cos \beta}{J} \left( \frac{l' C_r l_r}{v^2 \cos^2 \beta} - 1 \right) l_f \sin \delta - \frac{r}{m} \left( \frac{l' C_r l_r}{v^2 \cos^2 \beta} + 1 \right) \cos \delta \right) \\ &\quad + \gamma F_l \left( \frac{l' C_r}{\cos^2 \beta} \frac{\sin \beta}{mv} - \frac{r}{m} \left( \frac{l' C_r l_r}{v^2 \cos^2 \beta} + 1 \right) \right) \\ &\quad + F_{sf} \left( -\frac{l' C_r}{\cos^2 \beta} \frac{\cos(\beta - \delta)}{mv} + \frac{v \cos \beta}{J} \left( \frac{l' C_r l_r}{v^2 \cos^2 \beta} - 1 \right) l_v \cos \delta + \frac{r}{m} \left( \frac{l' C_r l_r}{v^2 \cos^2 \beta} + 1 \right) \sin \delta \right) \\ &\quad + F_{sr} \left( -\frac{l' C_r}{\cos^2 \beta} \frac{\cos \beta}{mv} + \frac{v \cos \beta}{J} \left( -\frac{l' C_r l_h}{v^2 \cos^2 \beta} + 1 \right) l_r \right) \\ &\quad + r \left( \frac{l' C_r}{\cos^2 \beta} + \left( \frac{l' C_r l_r}{v^2 \cos^2 \beta} - 1 \right) \frac{r}{m} v \sin \beta \right) + \frac{l' C_r h}{v \cos \beta} (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) + l' C_r \lambda_r \theta \end{aligned} \quad (6.11)$$

Par ailleurs :



$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ddot{y}_2}{\partial \delta} &= (1-\gamma)F_l \left( -\frac{l'C_r}{\cos^2 \beta} \frac{\cos(\beta-\delta)}{mv} + \frac{v \cos \beta}{J} \left( \frac{l'C_r l_r}{v^2 \cos^2 \beta} - 1 \right) l_f \cos \delta + \frac{r}{m} \left( \frac{l'C_r l_r}{v^2 \cos^2 \beta} + 1 \right) \sin \delta \right) \\
&\rightarrow + F_{sf} \left( -\frac{l'C_r}{\cos^2 \beta} \frac{\sin(\beta-\delta)}{mv} - \frac{v \cos \beta}{J} \left( \frac{l'C_r l_r}{v^2 \cos^2 \beta} - 1 \right) l_v \sin \delta + \frac{r}{m} \left( \frac{l'C_r l_r}{v^2 \cos^2 \beta} + 1 \right) \cos \delta \right) \\
&\quad + \partial_\delta F_{sf} \left( -\frac{l'C_r}{\cos^2 \beta} \frac{\cos(\beta-\delta)}{mv} + \frac{v \cos \beta}{J} \left( \frac{l'C_r l_r}{v^2 \cos^2 \beta} - 1 \right) l_v \cos \delta + \frac{r}{m} \left( \frac{l'C_r l_r}{v^2 \cos^2 \beta} + 1 \right) \sin \delta \right) \\
\frac{\partial \ddot{y}_2}{\partial F_l} &= -\frac{l'C_r}{mv \cos^2 \beta} [\sin(\beta-\delta)(1-\gamma) + \gamma \sin \beta] - (1-\gamma) \left( \frac{l'C_r l_r}{v^2 \cos^2 \beta} + 1 \right) \frac{v \cos \beta}{J} l_f \sin \delta \\
&\rightarrow + \frac{r}{m} \left( \frac{l'C_r l_r}{v^2 \cos^2 \beta} - 1 \right) [(1-\gamma) \cos \delta + \gamma] - \frac{l'C_r h \cos \theta}{v \cos \beta (I_x + m h^2 \sin^2 \theta)} (1-\gamma) \sin \delta \\
&\rightarrow \frac{\partial \ddot{y}_2}{\partial M_t} = \frac{l'C_r h \cos \theta}{v \cos \beta (I_x + m h^2 \sin^2 \theta)}
\end{aligned}$$

- calcul de la 3ème ligne

partant de :

$$\ddot{y}_3 = \ddot{z}^4 = \dot{z}^5 \quad (6.12)$$

$$\dot{z}^5 = \ddot{\theta} = \frac{1}{(I_x + m h^2 \sin^2 \theta)} (m g h \sin \theta - m h \dot{\theta}^2 \cos \theta \sin \theta - (F_{sf} \cos \delta + (1-\gamma) F_l \sin \delta + F_{sr}) h \cos \theta + M_t)$$

Nous retrouvons:

$$\begin{aligned}
&\rightarrow \frac{\partial \ddot{y}_3}{\partial \delta} = \frac{h \cos \theta}{(I_x + m h^2 \sin^2 \theta)} (-\partial_\delta F_{sf} \cos \delta + F_{sf} \dot{\delta} \sin \delta - (1-\gamma) F_l \dot{\delta} \cos \delta) \\
&\rightarrow \frac{\partial \ddot{y}_3}{\partial F_l} = -\frac{h \cos \theta}{(I_x + m h^2 \sin^2 \theta)} (1-\gamma) \sin \delta \\
&\rightarrow \frac{\partial \ddot{y}_3}{\partial M_t} = \frac{1}{(I_x + m h^2 \sin^2 \theta)}
\end{aligned}$$

- calcul du déterminant

Nous étudions ensuite les singularités engendrant des chutes de rang de la matrice  $M_D$  via le calcul de son déterminant. Pour cela nous utilisons la boîte à outils 'symbolic toolbox' de Matlab. Le programme réalisé est disponible en annexe 4. Celui-ci nous permet de conclure que cette matrice :

- n'est pas définie pour  $v=0$  ou  $\cos \beta=0$ , donc si le véhicule est immobile, ou si le sens de son déplacement est perpendiculaire à l'axe longitudinale du véhicule, ce qui est une configuration non réaliste.

- Considérant l'expression des forces de contact roue / sol (6.9), le déterminant de  $M$  est non nul quel que soit la valeur des variables du vecteur d'état  $v, \beta, r, \theta$  et  $\dot{\theta}$  (cf. annexe 4).

La preuve est ainsi faite que le changement de variable  $z = \phi(x)$  est un difféomorphisme local, que la matrice de découplage est de rang plein presque partout, et donc que la proposition suivante est vraie :

**Proposition 6.2 :**

Le système (6.4) est plat, et un jeu de sorties plates peut être défini par l'équation (6.6).

#### 4. Sens physique des sorties plates proposées

Les sorties plates sont définies par le vecteur  $y$  (équation (6.6)). Pour pouvoir contrôler le système en utilisant les propriétés de la platitude, nous avons besoin de comprendre le sens physique de ces sorties, de sorte à pouvoir déterminer et contrôler leur trajectoire. Nous les analysons ci-dessous. Rappelons d'abord la figure du modèle bicyclette dans le plan  $(XY)$  :

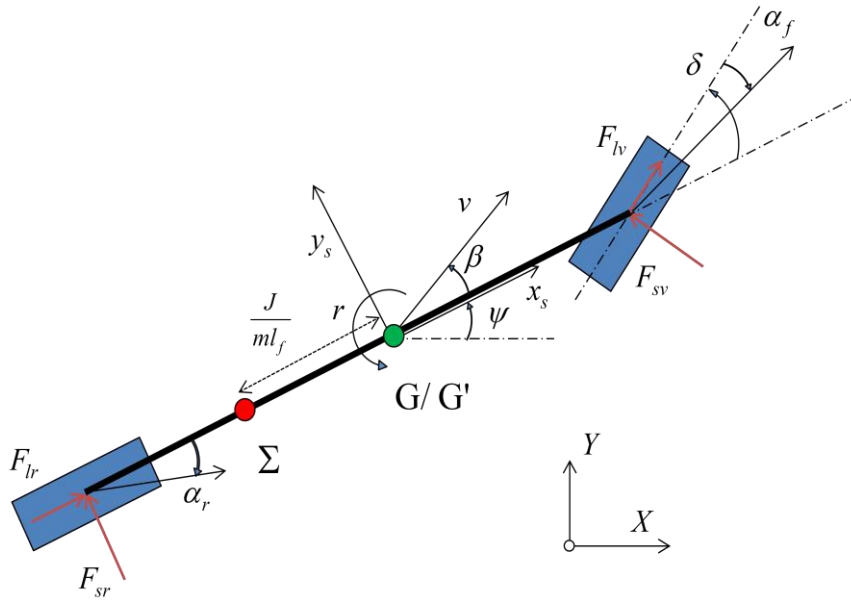


Figure 6.3 : Modèle bicyclette dans le plan  $(XY)$

Figure 6. 4 : Posi

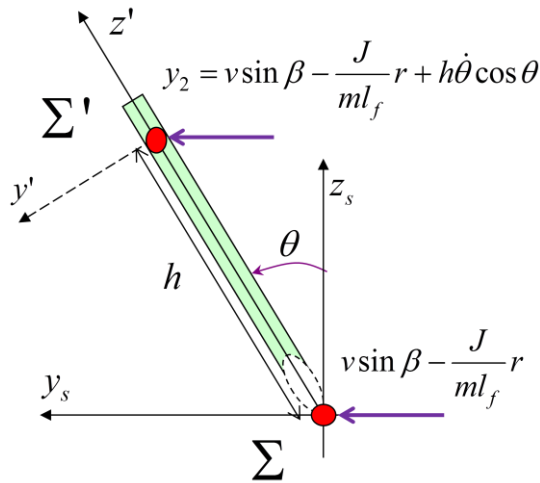
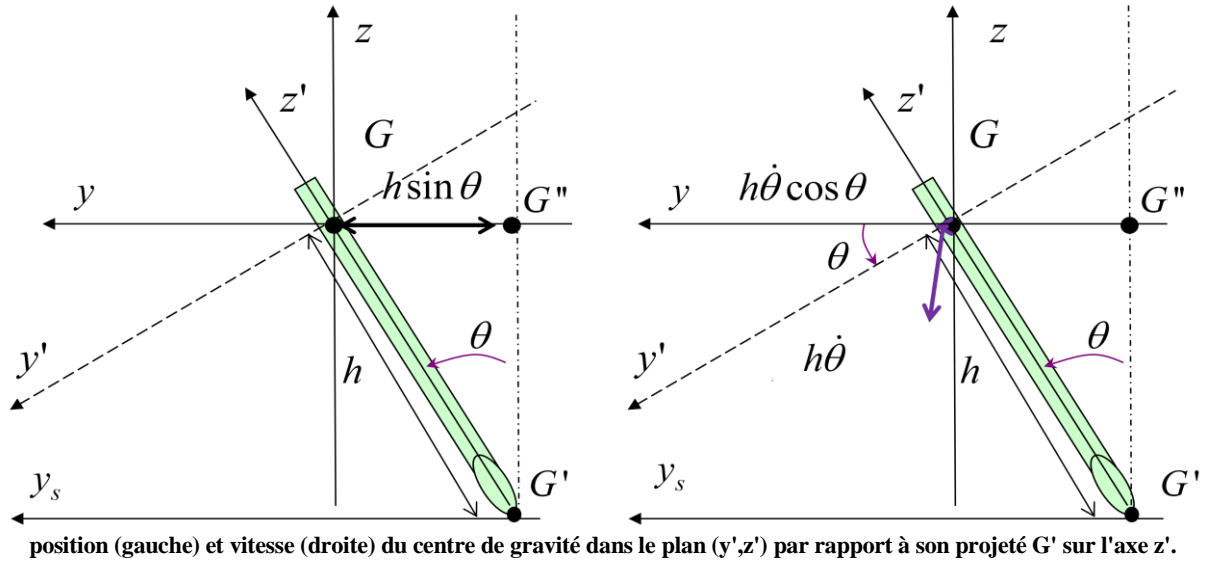


Figure 6. 5 : Vue du véhicule dans le plan  $(y_s, z_s)$  pour  $x_s = -J / (ml_f)$

Et définissons le repère  $(r_s) = (x_s, y_s, z_s)$  et les points  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  tels que :

- $(r_s) = (x_s, y_s, z_s)$  est le repère d'origine  $G'$  (cf. Figure 6. 4), le projeté du centre de gravité sur le plan du sol selon l'axe  $(z')$ . L'axe  $(x_s)$  est colinéaire avec l'axe du véhicule,  $(z_s)$  colinéaire avec  $(Z)$  et aussi  $(z)$ , et  $(y_s)$  est colinéaire à  $(y)$ . En d'autres termes  $(r_s)$  est le translaté de  $(r)$ , du point  $G$  au point  $G'$  selon l'axe  $(z')$ .

*Note* : quelques axes des repères sont visibles sur les Figure 6. 3 et Figure 6. 4. Pour retrouver les définitions complètes des repères se référer au chapitre 2, section 3.

- $\Sigma$  appartient à l'axe  $(x_s)$  du repère  $(r_s)$ , de coordonnées  $\Sigma_{r_s} = (-J / ml_f, 0, 0)$ .

- $\Sigma'$  appartient à l'axe  $(x)$  du repère  $(r)$ . Dans le repère  $(r_s)$  ses coordonnées s'écrivent  $\Sigma'_{r_s} = (-J / ml_f, h \sin \theta, h \cos \theta)$  (cf. Figure 6. 5).

#### 4.1. Sens physique de $y_1$

$y_1 = v \cos \beta$  est la projection de la vitesse  $v$  sur l'axe  $(x_s)$ , colinéaire à l'axe du véhicule. C'est donc la **vitesse longitudinale** du véhicule dans le repère  $(r_s)$ , Figure 6. 3.

Cette sortie est de degré relatif  $r_1 = 1$ , donc l'expression d'au moins une des entrées de commande  $\delta, F_l, M_t$ , apparaît dans  $\dot{y}_1$ . De fait :

$$\dot{y}_1 = \dot{z}^1 = \frac{1}{m} ((1 - \gamma) F_l \cos \delta + \gamma F_l - F_{sf} \sin \delta) + v r \sin \beta.$$

#### 4.2. Sens physique de $y_2$

$y_2 = v \sin \beta - \frac{J}{ml_f} r + h \dot{\theta} \cos \theta$  est la **vitesse latérale du point  $\Sigma'$  du châssis** (Figure 6. 5), confondu avec  $\Sigma$  sur la Figure 6. 3. Le point  $\Sigma'$  est situé à la hauteur  $h$  selon l'axe  $(z')$ .

Avant d'expliciter les propriétés de ce point et sa relation avec les autres grandeurs du système, nous proposons de justifier son choix.

Pour cela, considérons un point  $x_1$  de coordonnées  $(x_1, 0, 0)$  dans le repère  $(r_s)$ . La vitesse latérale  $v_l$  de  $x_1$  s'écrit alors :

$$v_l^{x_1} = v \sin \beta + x_1 r \quad (6.13)$$

Sa dérivée s'écrit :

$$\dot{v}_l^{x_1} = \dot{v} \sin \beta + v \dot{\beta} \cos \beta + x_1 \dot{r}$$

$$\dot{v}_l^{x_1} = \frac{1}{m} (F_{sr} (1 - x_1 \frac{ml_r}{J}) + \underbrace{(F_{lf} \sin \delta + F_{sf} \cos \delta)(1 + x_1 \frac{ml_f}{J})}_a - v r \cos \beta - \underbrace{(h \ddot{\theta} \cos \theta - h \dot{\theta}^2 \sin \theta)}_b) \quad (6.14)$$

*Note :* Pour la simplicité de la lecture, nous n'avons pas remplacé  $\ddot{\theta}$  par son expression, mais il est important de noter que  $\ddot{\theta}$  est une fonction explicite de l'entrée  $M_t$  et de  $F_{lf} = (1 - \gamma) F_l$ .

Les entrées de commande apparaissent dans les termes  $a$  et  $b$  de l'expression de  $\dot{v}_l^{x_1}$  (équation 6.14), ce qui fait que la sortie  $\dot{v}_l^{x_1}$  est de degré relatif égal à 1. Or nous recherchons une sortie de degré relatif égal à 2, puisque nous voulons satisfaire la condition  $r_1 + r_2 + r_3 = 5$ , avec  $r_1 = 1$  et

$r_3 = 2$  (cela sera démontré par la suite). Pour cela, nous avons cherché à annuler ou simplifier les termes  $a$  et  $b$ . Or en observant l'expression (6.14), on remarque que :

- Pour annuler le terme  $a$ , il suffit de prendre  $x_1 = -J / ml_f$ . Ainsi les termes contenant les deux entrées de commande  $\delta$  et  $F_l$  sont éliminées de l'expression de  $\dot{v}_l^{x_1}$ .
- Reste alors le terme  $b$  dans contenant  $\ddot{\theta}$ . Or  $h\ddot{\theta}\cos\theta - h\dot{\theta}^2\sin\theta$  est intégrable, elle est la dérivée du terme  $h\dot{\theta}\cos\theta$ , d'où vient l'idée de simplifier le terme  $b$  en ajoutant  $h\dot{\theta}\cos\theta$  à l'expression de  $v_l^{x_1}$ . Ceci revient à compenser l'effet de la dynamique d'inclinaison.

Ainsi, l'expression d'une sortie plate est :

$$y_2 = v\sin\beta - \frac{J}{ml_f}r + h\dot{\theta}\cos\theta, \quad (6.15)$$

Dont la dérivée  $\dot{y}_2$  est indépendante des entrées :

$$\dot{y}_2 = \frac{1}{m}F_{sr}\left(1 - \frac{l_r}{l_f}\right) - vr\cos\beta \quad (6.16)$$

L'expression de  $y_2$  comprend trois termes exprimant des vitesses dans le repère  $(r_s)$  :

- $v\sin\beta$  : exprime la vitesse latérale du point  $G'$  (Figure 6. 3),
- $-Jr / ml_f$  : exprime la vitesse latérale relative du point  $\Sigma$  par rapport au point  $G$ , lorsque le véhicule a une vitesse de lacet non nulle  $\dot{\psi} = r \neq 0$ . La distance séparant les deux points  $\Sigma$  et  $G$  étant  $J / ml_f$ .
- $h\dot{\theta}\cos\theta$  : représente la vitesse relative du centre de gravité  $G$  par rapport à  $G''$  (Figure 6. 4). La distance  $\overline{GG''} = h\sin\theta$ , et la vitesse, dérivée de la distance, est  $h\dot{\theta}\cos\theta$ .

Finalement,  $y_2$  (cf. équation (6.15)) **exprime la vitesse latérale dans le repère  $(r_s)$  du point  $\Sigma'$  du véhicule situé à une distance  $h$  de  $\Sigma$**  (Figure 6. 5).

#### 4.3. Sens physique de $y_3$

$y_3 = \theta$ , exprime l'angle d'inclinaison ; il est directement relié à la grandeur à contrôler pour garantir la stabilité latérale.  $y_3$  est d'ordre relatif  $r_3 = 2$ , puisque les entrées de commande apparaissent dans l'expression de  $\ddot{y}_3 = \ddot{\theta}$ .

## 5. Linéarisation - calcul du compensateur

La compréhension du sens physique des sorties plates est essentielle pour définir l'objectif de la commande. Reste alors à calculer le compensateur, qui réalisera la linéarisation du système, et reliera au travers de chaînes d'intégrateurs, ces sorties plates aux nouvelles entrées.

Partant d'un système d'ordre  $n=5$  ayant  $m=3$  entrées, nous avons réussi à trouver  $m=3$  sorties plates, dont la somme des degrés relatifs égale l'ordre du système  $r_1 + r_2 + r_3 = n = 5$ . Ainsi, un **compensateur statique** est capable de résoudre le problème de linéarisation/découplage du système.

Ce compensateur calcule les entrées du système  $[\delta, F_l, M_t]$ , en fonction des nouvelles entrées  $[w_1, w_2, w_3]$ , de sorte à avoir un système équivalent à des chaînes d'intégrateurs. La Figure 6. 6 est une réplique de la Figure 6. 2, que nous avons adaptée au modèle linéarisé du véhicule.

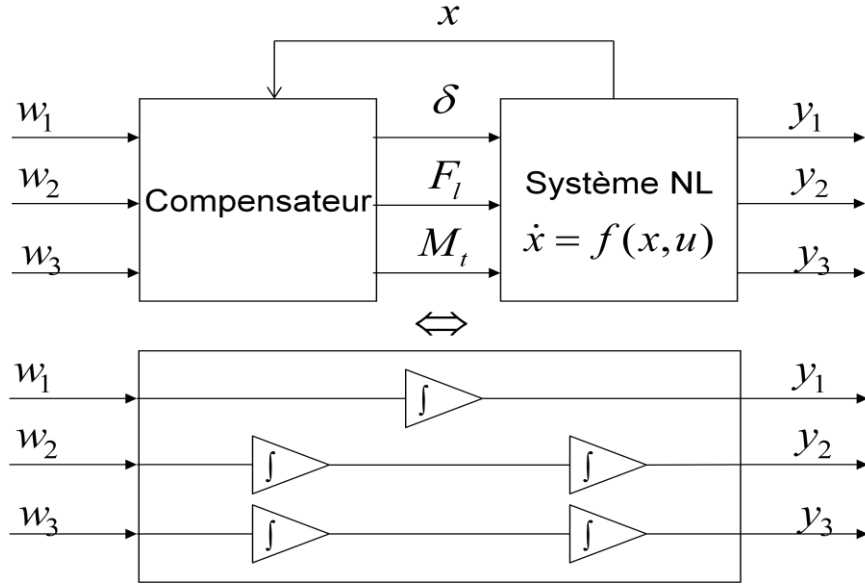


Figure 6. 6 : Système linéarisé équivalent au système NL couplé avec le compensateur

Le système ainsi linéarisé sera composée de 3 chaînes d'intégrateurs, comprenant  $n=5$  intégrateurs au total, avec :

$$\begin{aligned} w_1 &= (L_f c^1)(x, u) = \dot{y}_1 = \dot{z}^1, \\ w_2 &= L_f^2 c^2(x, u) = \ddot{y}_2 = \ddot{z}^2, \\ w_3 &= L_f^2 c^3(x, u) = \ddot{y}_3 = \ddot{z}^4. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Le système non linéaire bouclé par le compensateur pourra alors s'écrire :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}^1 \\ \dot{z}^2 \\ \dot{z}^3 \\ \dot{z}^4 \\ \dot{z}^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \\ z^4 \\ z^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

Le véhicule que nous considérons est à propulsion (roues arrières motrices), ce qui correspond au paramètre  $\gamma = 1$  ; par suite,  $F_{lr} = \gamma F_l = F_l$  et  $F_{lf} = (1 - \gamma)F_l = 0$ .

Les relations (6.17) constituent un système de trois équations algébriques résumées par  $w = s(x, u)$ . Nous chercherons à inverser ces relations pour obtenir  $u = s'(w, x)$ . La partie suivante expose l'explicitation de  $s'(w, x)$ , par la résolution d'un système de trois équations à trois inconnues.

**Proposition 6.3 :**

Le compensateur statique découplant et linéarisant  $u = s'(w, x)$  pour le système (6.4) considérant les sorties plates (6.6), sous l'hypothèse  $v \neq 0$ ,  $\cos(\beta) \neq 0$  est défini par:

$$M_t = \frac{x_1 \cos \beta + x_2 + x_4}{x_1 \cos \beta + x_2 + x_4 + x_{mt} h \cos \theta} (w_3 (I_x + m h^2 \sin^2 \theta) - m h \sin \theta (g - \dot{\theta}^2 \cos \theta) + (\frac{w_2 - x_f m w_1 + x_f m v r \sin \beta - x_m}{(x_1 \cos \beta + x_2 + x_4)} + F_{sh}) h \cos \theta)$$

$$\delta = \frac{1}{2} \sin^{-1} \left( \frac{w_2 - x_f m w_1 + x_f m v r \sin \beta - x_m - x_{mt} M_t}{2 C_f (x_1 \cos \beta + x_2 + x_4)} \right)$$

$$F_l = m w_1 + C_f \sin^2 \delta - m v r \sin \beta$$

**Preuve :**

Développons d'abord les équations (6.17), se basant sur les équations (6.10) à (6.12) :

$$\left\{ \begin{aligned}
w_1 &= \frac{1}{m} (F_{lf} \cos \delta + F_{lr} - F_{sf} \sin \delta) + vr \sin \beta \\
w_2 &= (1-\gamma) F_l \left( \frac{l' C_r}{\cos^2 \beta} \frac{\sin(\beta-\delta)}{mv} + \frac{v \cos \beta}{J} \left( \frac{l' C_r l_r}{v^2 \cos^2 \beta} - 1 \right) l_f \sin \delta - \frac{r}{m} \left( \frac{l' C_r l_r}{v^2 \cos^2 \beta} + 1 \right) \cos \delta \right) \\
&\quad + \gamma F_l \left( \frac{l' C_r}{\cos^2 \beta} \frac{\sin \beta}{mv} - \frac{r}{m} \left( \frac{l' C_r l_r}{v^2 \cos^2 \beta} + 1 \right) \right) \\
&\quad + F_{sf} \left( -\frac{l' C_r}{\cos^2 \beta} \frac{\cos(\beta-\delta)}{mv} + \frac{v \cos \beta}{J} \left( \frac{l' C_r l_r}{v^2 \cos^2 \beta} - 1 \right) l_v \cos \delta + \frac{r}{m} \left( \frac{l' C_r l_r}{v^2 \cos^2 \beta} + 1 \right) \sin \delta \right) \\
&\quad + F_{sr} \left( -\frac{l' C_r}{\cos^2 \beta} \frac{\cos \beta}{mv} + \frac{v \cos \beta}{J} \left( -\frac{l' C_r l_h}{v^2 \cos^2 \beta} + 1 \right) l_r \right) \\
&\quad + r \left( \frac{l' C_r}{\cos^2 \beta} + \left( \frac{l' C_r l_r}{v^2 \cos^2 \beta} - 1 \right) \frac{r}{m} v \sin \beta \right) + \frac{l' C_r h}{v \cos \beta} (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) + l' C_r \lambda_r \theta \\
w_3 &= \frac{1}{(I_x + mh^2 \sin^2 \theta)} (mgh \sin \theta - mh \dot{\theta}^2 \cos \theta \sin \theta - (F_{sf} \cos \delta + (1-\gamma) F_l \sin \delta + F_{sr}) h \cos \theta + M_t)
\end{aligned} \right. \quad (6.19)$$

Compte tenu de la valeur de  $\gamma = 1$  et en remplaçant  $\ddot{\theta}$  par sa valeur, le système (6.19) s'écrit :

$$\left\{ \begin{aligned}
w_1 &= \frac{1}{m} (F_l - F_{sf} \sin \delta) + vr \sin \beta \quad (1) \\
w_2 &= F_l \left( \frac{l' C_r}{\cos^2 \beta} \frac{\sin \beta}{mv} - \frac{r}{m} \left( \frac{l' C_r l_r}{v^2 \cos^2 \beta} + 1 \right) \right) \\
&\quad + F_{sf} \left( -\frac{l' C_r}{\cos^2 \beta} \frac{\cos(\beta-\delta)}{mv} + \frac{v \cos \beta}{J} \left( \frac{l' C_r l_r}{v^2 \cos^2 \beta} - 1 \right) l_v \cos \delta \right. \\
&\quad \left. + \frac{r}{m} \left( \frac{l' C_r l_r}{v^2 \cos^2 \beta} + 1 \right) \sin \delta - \frac{l' C_r h}{v \cos \beta} \frac{h \cos^2 \theta}{(I_x + mh^2 \sin^2 \theta)} \cos \delta \right) \\
&\quad + F_{sr} \left( -\frac{l' C_r}{\cos^2 \beta} \frac{\cos \beta}{mv} + \frac{v \cos \beta}{J} \left( -\frac{l' C_r l_h}{v^2 \cos^2 \beta} + 1 \right) l_r - \frac{l' C_r h}{v \cos \beta} \frac{h \cos^2 \theta}{(I_x + mh^2 \sin^2 \theta)} \right) \\
&\quad + r \left( \frac{l' C_r}{\cos^2 \beta} + \left( \frac{l' C_r l_r}{v^2 \cos^2 \beta} - 1 \right) \frac{r}{m} v \sin \beta \right) + \frac{LC_r h \sin \theta}{v \cos \beta} \left( \frac{mh(g - \dot{\theta}^2 \cos \theta) \cos \theta}{(I_x + mh^2 \sin^2 \theta)} - \dot{\theta}^2 \right) \quad (2) \\
&\quad + l' \lambda_r \dot{\theta} + \frac{LC_r h \cos \theta}{v \cos \beta} M_t \\
w_3 &= \frac{1}{(I_x + mh^2 \sin^2 \theta)} (mgh \sin \theta - mh \dot{\theta}^2 \cos \theta \sin \theta - (F_{sf} \cos \delta + F_{sr}) h \cos \theta + M_t) \quad (3)
\end{aligned} \right. \quad (6.20)$$

L'étape suivante consiste à déterminer  $u = s'(w, x)$  à partir de (6.18) :

- (6.18)(1) est fonction des deux entrées  $(\delta, F_l)$  ; choisissant d'expliciter  $F_l$ , nous obtenons :

$$F_l = mw_1 + F_{sf} \sin \delta - mrv \sin \beta \quad (6.21)$$

- Dans (6.18)(2) le calcul étant compliqué, on définit les variables intermédiaires :



$$\begin{aligned}
w_2 = & \underbrace{F_l \left( -\frac{l'C_r}{mv \cos^2 \beta} \left( \sin \beta - \frac{rl_r}{v} \right) - \frac{r}{m} \right)}_{x_f} \\
& + F_{sf} \left( -\frac{l'C_r}{mv \cos^2 \beta} \cos(\beta - \delta) + \underbrace{\frac{l_f}{J} \left( \frac{l'C_r}{v \cos \beta} l_r - v \cos \beta \right) \cos \delta}_{x_2} + \underbrace{\frac{r}{m} \left( \frac{l'C_r l_r}{v^2 \cos^2 \beta} + 1 \right) \sin \delta}_{x_3} - \underbrace{\frac{l'C_r h}{v \cos \beta} \frac{h \cos^2 \theta}{(I_x + mh^2 \sin^2 \theta)} \cos \delta}_{x_4} \right) \\
& + F_{sr} \left( -\frac{l'C_r}{mv \cos \beta} - \frac{l_r}{J} \left( \frac{l'C_r}{v \cos \beta} l_r - v \cos \beta \right) - \frac{l'C_r h}{v \cos \beta} \frac{h \cos^2 \theta}{(I_x + mh^2 \sin^2 \theta)} \right) + r \left( \frac{l'C_r}{\cos^2 \beta} - \left( \frac{l'C_r l_r}{v \cos^2 \beta} + v \right) r \sin \beta \right) + l' \lambda_r \dot{\theta} \\
& + \underbrace{\frac{l'C_r h \sin \theta}{v \cos \beta} \left( \frac{mh(g - \dot{\theta}^2 \cos \theta) \cos \theta}{(I_x + mh^2 \sin^2 \theta)} - \dot{\theta}^2 \right)}_{x_m} \\
& + \underbrace{\frac{l'C_r h \cos \theta}{v \cos \beta} M_t}_{x_{mt}}
\end{aligned}$$

ainsi :

$$\begin{aligned}
w_2 = & x_f F_l + x_m + F_{sf} x_1 (\cos \beta \cos \delta + \sin \beta \sin \delta) + F_{sf} (x_2 + x_4) \cos \delta + F_{sf} x_3 \sin \delta + x_{mt} M_t \\
w_2 = & x_f F_l + x_m + F_{sf} (x_1 \cos \beta + x_2 + x_4) \cos \delta + F_{sf} (x_1 \sin \beta + x_3) \sin \delta + x_{mt} M_t
\end{aligned}$$

En remplaçant  $F_l$  par sa valeur dans (6.19):

$$\begin{aligned}
w_2 = & x_f (mw_1 + F_{sf} \sin \delta - mvr \sin \beta) + x_m + F_{sf} (x_1 \cos \beta + x_2 + x_4) \cos \delta + F_{sf} (x_1 \sin \beta + x_3) \sin \delta + x_{mt} M_t \\
w_2 = & x_f mw_1 - x_f mvr \sin \beta + x_m + F_{sf} (x_1 \cos \beta + x_2 + x_4) \cos \delta + \cancel{F_{sf} (x_1 \sin \beta + x_3) \sin \delta}
\end{aligned}$$

Sachant que  $x_1 \sin \beta + x_2 + x_f = 0$ , et en remplaçant  $F_{sf}$  par sa valeur dans (6.9) :

$$\begin{aligned}
\Rightarrow & F_{sf} (x_1 \cos \beta + x_2 + x_4) \cos \delta = w_2 - x_f mw_1 + x_f mvr \sin \beta - x_m - x_{mt} M_t \\
\Rightarrow & F_{sf} \cos \delta = \frac{w_2 - x_f mw_1 + x_f mvr \sin \beta - x_m - x_{mt} M_t}{x_1 \cos \beta + x_2 + x_4} \quad (6.22)
\end{aligned}$$

En remplaçant (6.21) et (6.22) dans (6.20)(3) :

$$\begin{aligned}
w_3 = & \frac{1}{(I_x + mh^2 \sin^2 \theta)} (mgh \sin \theta - mh \dot{\theta}^2 \cos \theta \sin \theta - \left( \frac{w_2 - x_f mw_1 + x_f mvr \sin \beta - x_m - x_{mt} M_t}{(x_1 \cos \beta + x_2 + x_4)} + F_{sh} \right) h \cos \theta + M_t) \\
\Rightarrow & w_3 (I_x + mh^2 \sin^2 \theta) = M_t \left( 1 + \frac{x_{mt} h \cos \theta}{(x_1 \cos \beta + x_2 + x_4)} \right) + mh \sin \theta (g - \dot{\theta}^2 \cos \theta) \\
& - \left( \frac{w_2 - x_f mw_1 + x_f mvr \sin \beta - x_m}{(x_1 \cos \beta + x_2 + x_4)} + F_{sh} \right) h \cos \theta \\
\Rightarrow & M_t \left( \frac{x_1 \cos \beta + x_2 + x_4 + x_{mt} h \cos \theta}{x_1 \cos \beta + x_2 + x_4} \right) = w_3 (I_x + mh^2 \sin^2 \theta) - mh \sin \theta (g - \dot{\theta}^2 \cos \theta) \\
& + \left( \frac{w_2 - x_f mw_1 + x_f mvr \sin \beta - x_m}{(x_1 \cos \beta + x_2 + x_4)} + F_{sh} \right) h \cos \theta
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow M_t = \frac{x_1 \cos \beta + x_2 + x_4}{x_1 \cos \beta + x_2 + x_4 + x_{mt} h \cos \theta} (w_3(I_x + mh^2 \sin^2 \theta) - mh \sin \theta (g - \dot{\theta}^2 \cos \theta) + (\frac{w_2 - x_f m w_1 + x_f m v r \sin \beta - x_m}{(x_1 \cos \beta + x_2 + x_4)} + F_{sh}) h \cos \theta) \quad (6.23)$$

- En utilisant (6.23), nous pouvons retrouver les expressions de  $\delta$  et  $F_l$  en fonction de  $w$ .

$$\delta = \frac{1}{2} \sin^{-1} \left( \frac{w_2 - x_f m w_1 + x_f m v r \sin \beta - x_m - x_{mt} M_t}{2C_f (x_1 \cos \beta + x_2 + x_4)} \right) \quad (6.24)$$

$$F_l = m w_1 + C_f \sin^2 \delta - m v r \sin \beta \quad (6.25)$$

Ainsi le compensateur découplant et linéarisant est obtenu, et le système couplé avec le compensateur est alors équivalent à 3 chaînes d'intégrateurs découplés.

## 6. Validation du compensateur linéarisant par simulation de la boucle interne

Pour valider le compensateur ainsi obtenu, nous proposons un test préliminaire simple qui compare en **boucle ouverte** les sorties  $z^1, z^2, z^3$  du système couplé avec le compensateur Figure 6. 6 (haut) avec les sorties des chaînes d'intégrateurs Figure 6. 6 (bas). Pour cela, choisissons des entrées  $w$ , de manière un peu arbitraire quoique conduisant à un scénario respectant les ordres de grandeur.

Choisissons des valeurs constantes :

$$\begin{cases} w_1 = 4 \\ w_2 = 0.2 \\ w_3 = 0.3 \end{cases} \quad (6.26)$$

Une constante  $w_1$  en entrée d'un intégrateur simple résulte en sortie en une droite affine de pente  $w_1$  :

$$\dot{z}^1 = w_1 \Rightarrow z^1(t) = w_1 t + z^1(0) \quad \text{avec} \quad z^1(0) = v_0 = 4m / s$$

Une constante en entrée d'un double intégrateur résulte en sortie en une fonction en  $t^2$  :

$$\ddot{z}^2 = w_2 \Rightarrow z^2(t) = w_2 t^2 + \dot{z}^2(0)t + z^2(0) \quad \text{avec} \quad \dot{z}^2(0) = z^2(0) = 0$$

$$\ddot{z}^3 = w_3 \Rightarrow z^3(t) = w_3 t^2 + \dot{z}^3(0)t + z^3(0) \quad \text{avec} \quad \dot{z}^3(0) = z^3(0) = 0$$

Les résultats des simulations sont représentés sur les Figure 6. 7 et Figure 6. 8.

La Figure 6. 7 montre que le compensateur calculé dans le paragraphe précédent, linéarise et découple parfaitement le système, les courbes représentant les sorties du système linéarisé sont superposées avec les courbes représentant les sorties des chaînes d'intégrateur. En complément, la trajectoire au sol obtenue lors de la simulation est représentée sur la Figure 6. 8. Elle est parfaitement cohérente avec l'allure des sorties  $z$  obtenues ; la vitesse longitudinale augmente de façon proportionnelle, et la vitesse latérale augmente de façon quadratique, ce qui fait que le véhicule décrit une trajectoire en spirale.

Ces résultats, obtenus en l'absence de la boucle externe, s'avèrent particulièrement sensibles aux erreurs numériques. Seul un choix judicieux pour la boucle externe procurera stabilité et robustesse. Le régulateur de la boucle externe sera constitué, dans un premier temps, à partir de PID élémentaires, comme le précise le paragraphe suivant.

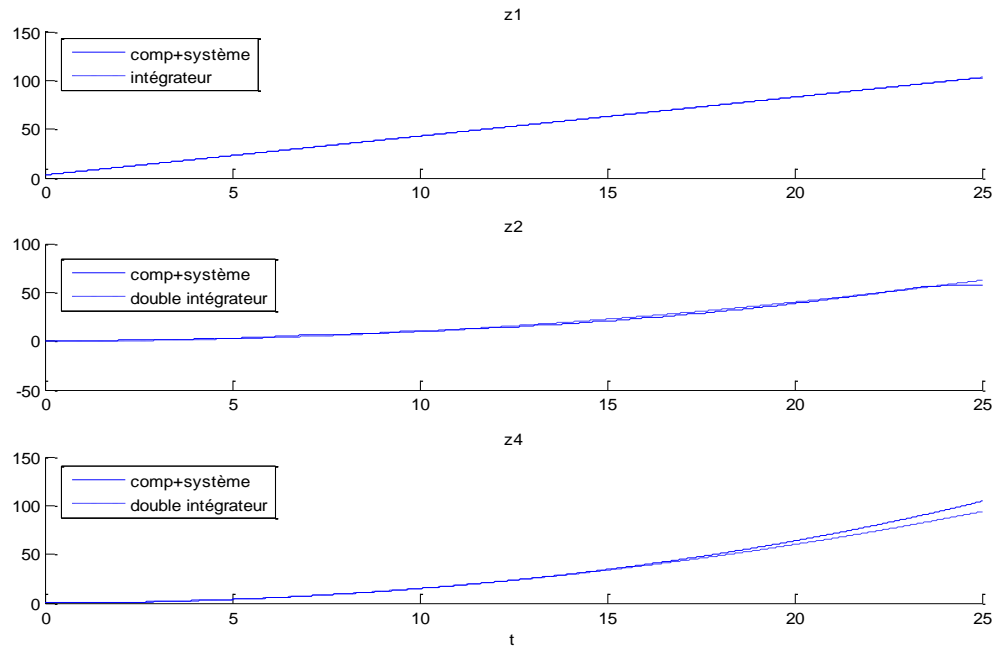


Figure 6. 7 : Comparaison entre système linéarisé et découplé et chaînes d'intégrateurs

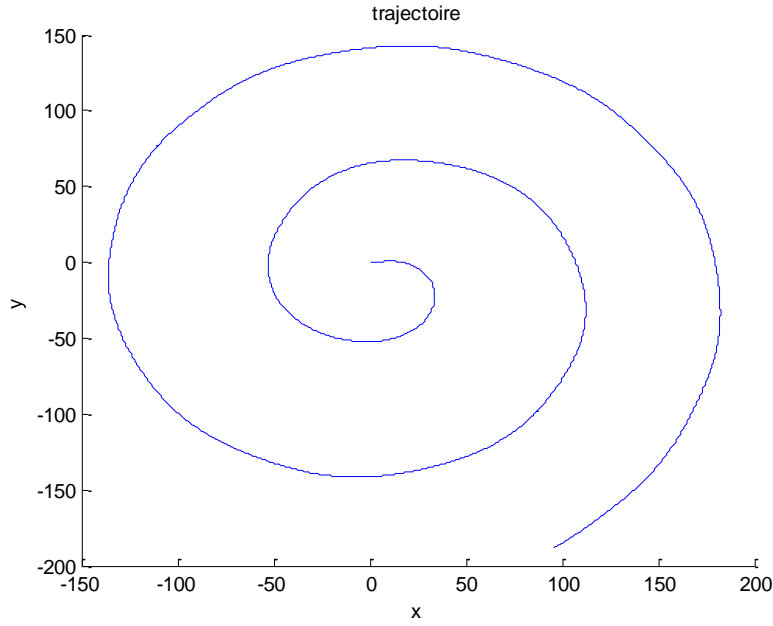


Figure 6. 8 : Trajectoire correspondante du véhicule

## 7. Commande par platitude

Nous cherchons ici à asservir les sorties plates  $y_1, y_2$  et  $y_3$  du système linéarisé (boucle interne), pour assurer la stabilité latérale du système. Le problème est donc un problème de suivi de trajectoire, la trajectoire de référence désirée pour ces sorties, notées  $y_1^d, y_2^d$  et  $y_3^d$ , étant compatible avec l'objectif de stabilisation latérale. Le régulateur linéaire a quant à lui la mission d'assurer  $(y_1, y_2, y_3) \rightarrow (y_1^d, y_2^d, y_3^d)$ . Construisons en premier lieu les trajectoires de référence.

Il faut noter que les entrées  $F_l$  et  $\delta$ , qui sont normalement déterminées par le conducteur, sont dans ce qui précède considérées comme des sorties du compensateur non linéaire. Ce paradoxe apparent est surmonté par le fait que les actions du conducteur, notées désormais  $F_{l-cond}$  et  $\delta_{cond}$ , sont prises en compte lors de la détermination des valeurs désirées pour les sorties plates  $y_1^d, y_2^d$  et  $y_3^d$ , et constituent les entrées du bloc 'génération de la trajectoire' développé dans le paragraphe 7.1.

La structure finale du système de commande proposé est illustrée sur la Figure 6. 9. Elle utilise une approximation pour la 'Génération de la trajectoire', et dans l'objectif de la stabilisation latérale, cherche à asservir les sorties plates, aux moyens de régulateurs élémentaires de type PID. Notons que dans ce contexte, l'objectif de commande sera l'asservissement de l'angle d'inclinaison  $\theta$ , qui est la sortie plate  $y_3$ , tel que  $\theta \rightarrow \theta_{ref}$ , (plutôt que l'asservissement de l'accélération latérale perçue  $a_{lat}$ ).

Les résultats proposés ici sont novateurs, ouvrant une voie nouvelle pour aborder la commande des VEI. Ils ne présentent pas, faute de temps, une solution finalisée ; des développements restent à réaliser pour obtenir un schéma d'ensemble performant (à l'égal, aux petits angles, des régulateurs linéaires proposés aux chapitres 4 & 5) et robuste (Franco et al. 2006).

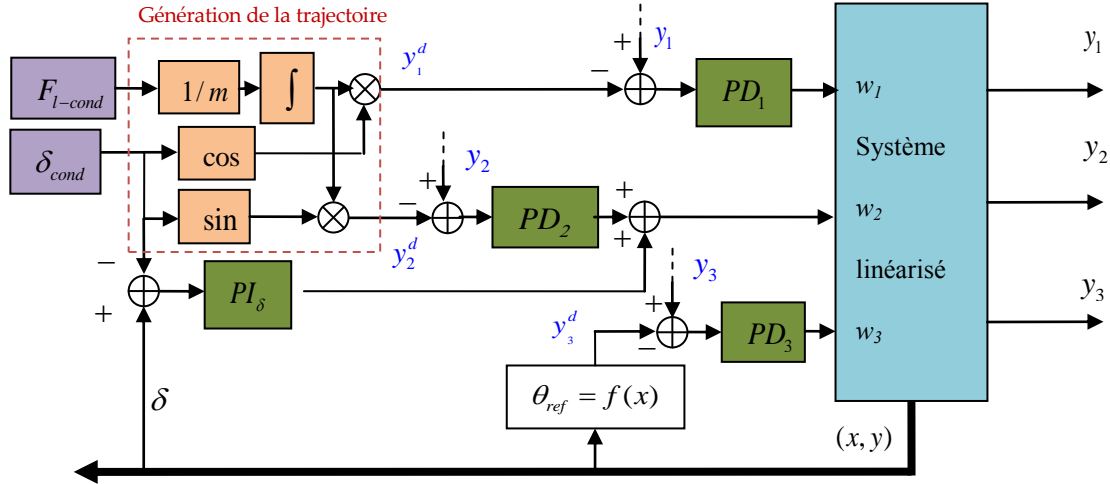


Figure 6. 9 : Architecture du contrôleur

## 7.1. Génération de la trajectoire

Le conducteur fixe au travers de  $F_{l-cond}$  et  $\delta_{cond}$ , les forces de propulsion du véhicule et angle de braquage des roues souhaités. De ces entrées, on peut plus généralement déduire la trajectoire souhaitée pour le véhicule, et donc ses vitesses et accélérations longitudinales et latérales.

La force de propulsion  $F_{l-cond}$  déterminera l'accélération du véhicule dans le sens de l'orientation des roues. La vitesse correspondante s'écrit :

$$v = \int_0^t \frac{F_l}{m} + v_0 \quad (6.27)$$

En projetant cette expression sur les axes longitudinal et latéral du véhicule, nous retrouvons :

$$\begin{cases} v_{x-cond} = v \cos \delta = \left( \int_0^t \frac{F_l}{m} + v_0 \right) \cos \delta \\ v_{y-cond} = v \sin \delta = \left( \int_0^t \frac{F_l}{m} + v_0 \right) \sin \delta \end{cases} \quad (6.28)$$

D'autre part, l'angle d'inclinaison  $\theta$  qui assure la stabilité du véhicule est calculé à partir de l'expression de l'accélération perçue. Il s'exprime (cf. équation 3.10):

$$\theta_{ref} = \tan^{-1}\left(\frac{a_{lat}}{g}\right) \quad (6.29)$$

**Remarque :** Nous considérons dans ce chapitre, que nous avons accès aux valeurs de toutes les variables d'état, et que  $\dot{y}$  est reconstruit comme indiqué au Chapitre 4.

Ainsi, à partir des ces équations (6.26) et (6.27) nous définissons les expressions des sorties plates désirées :

$$\begin{cases} y_1^d = v_{x-cond} = v \cos \delta = \left( \int_0^t F_l + v_0 \right) \cos \delta \\ y_2^d = v_{y-cond} = v \sin \delta = \left( \int_0^t F_l + v_0 \right) \sin \delta \\ y_3^d = \theta_{ref} = tg^{-1}\left(\frac{vr \cos \beta}{g}\right) \end{cases} \quad (6.30)$$

Il est important de noter que :

- La vitesse latérale  $v_{y-cond}$  est généralement celle souhaitée pour le centre de gravité  $G$  du véhicule, alors que  $y_2$  exprime la vitesse latérale du point  $\Sigma'$ . Mais la relation entre la vitesse latérale de  $G$  et  $\Sigma'$  est affine en fonction de la vitesse de lacet  $r$  :

$$v^{\Sigma'} = v^G - \frac{J}{ml_f} r$$

Il en suit que, pour suivre une trajectoire donnée, le conducteur aura à imposer un angle  $\delta_{cond}$  inférieur à celui qu'il aurait imposé sur un véhicule classique. C'est une adaptation que nous estimons naturelle et sans complication, le conducteur n'étant amené qu'à connaître le véhicule pourvu de son assistance à l'inclinaison.

- Notons aussi que ce système peut être considéré comme un système d'assistance à la conduite, dans le sens où, peu importe les conditions de la chaussée (*i.e.* facteur de glissement), le contrôleur assurera le suivi de trajectoire désiré. Le glissement par exemple, sera considéré comme une perturbation, et l'angle de braquage et la force motrice appliqués au véhicule seront calculés et adaptés de sorte à ce que le véhicule suive au mieux la volonté du conducteur.

## 7.2. Asservissement des chaînes découplées : contrôleurs PI/PD

Le système linéarisé de la Figure 6. 9 est constitué du véhicule bouclé par le compensateur, et les sorties plates sont indépendantes et découplées les unes des autres vis-à-vis des entrées  $w$ . Ainsi le contrôle de chaque sortie est fait indépendamment des autres. Les réglages de ces contrôleurs sont détaillés dans ce qui suit :

### 7.2.1. Réglage du contrôleur de $y_1$

Nous choisissons pour cet asservissement un Proportionnel Dérivé PD, agissant sur l'erreur  $e_1 = y_1 - y_1^d$ .

Le signal de commande s'écrit alors :

$$w_1 = K_{p1}e_1 + K_{d1}\dot{e}_1 \quad (6.31)$$

### 7.2.2. Réglage du contrôleur de $y_2$

Pour cette commande, en plus du PD sur l'erreur  $e_2 = y_2 - y_2^d$ , nous ajoutons un Proportionnel Intégrale sur l'erreur de l'angle de braquage  $e_\delta = \delta - \delta_{cond}$ , ceci pour assurer avec plus de précision le suivi de trajectoire. Le signal de commande s'écrit :

$$w_2 = K_{p2}e_2 + K_{d2}\dot{e}_2 + K_{p\delta}e_\delta + K_{I\delta}\int e_\delta dt \quad (6.32)$$

### 7.2.3. Réglage du contrôleur de $y_3$

Un troisième Proportionnel Dérivé PD est proposé pour asservir l'erreur agissant sur l'angle d'inclinaison :

$$e_3 = y_3 - y_3^d.$$

Le signal de commande correspondant s'écrit :

$$w_3 = K_{p3}e_3 + K_{d3}\dot{e}_3 \quad (6.33)$$

## 7.3. Simulations et Résultats

### 7.3.1. Réglages et scénario

Nous réglons les gains des PID comme suit :

$$\begin{cases} PD_1 : K_{p1} = 2, & K_{d1} = 0.2 \\ PD_2 : K_{p2} = 3.5, & K_{d2} = 5 \\ PD_3 : K_{p3} = 0.6, & K_{d3} = 1.3 \\ PI_\delta : K_{p\delta} = 40, & K_{I\delta} = 0.2 \end{cases}$$

Dans le but de vérifier la validité de ce contrôleur non linéaire (**contrôleur NL**) vis-à-vis de différentes conditions de circulation, nous présenterons ses performances temporelles en comparaison avec les performances du contrôleur LPV-SDTC  $R^{SD}(V)$ , (**contrôleur LPV**) présenté dans le chapitre 5.

Nous proposons le scénario suivant :

- Véhicule en accélération, donc une force motrice imposée par le conducteur non nulle,  $F_{l-cond} \neq 0$ ,
- Une trajectoire comportant un premier virage à droite suivi d'une trajectoire circulaire.

**Remarque :** Pour des entrées conducteur données  $F_{l-cond}$  et  $\delta_{cond}$ , les comportements du véhicule doté du **contrôleur NL** et celui du véhicule doté du **contrôleur LPV** ne sont pas identiques. Comme nous l'avons relaté précédemment, la conduite de chaque véhicule nécessite une adaptation du conducteur. Pour cela, nous considérons les entrées conducteur  $F_{l-cond}$  et  $\delta_{cond}$  représentées sur la Figure 6. 10 pour le véhicule doté du **contrôleur NL**, et cherchons les entrées du véhicule avec le **contrôleur LPV**, qui correspondent à la même vitesse et à la même trajectoire.

La Figure 6. 10 présente l'angle de braquage et la force de propulsion imposés par le conducteur  $F_{l-cond}$  et  $\delta_{cond}$  et ceux calculés par le compensateur  $F_{l-véhicule}$  et  $\delta_{roues}$ . L'angle aux roues suit bien les consignes du conducteur avec un petit écart. La force de propulsion quant-à elle est égale à la consigne du conducteur lorsque la trajectoire est rectiligne, mais elle diminue nettement en virage, ce pour permettre un meilleur suivi de trajectoire, en essayant de diminuer et/ou compenser le glissement. Les Figure 6. 11 et Figure 6. 12 illustrent la vitesse, la trajectoire, l'angle d'inclinaison, le couple de l'actionneur, l'accélération perçue, et l'accélération latérale créée par la trajectoire. Ces figures montrent que le **contrôleur NL** est capable d'assurer la stabilité du véhicule, avec des valeurs acceptables pour l'accélération perçue ( $a_{per}^{max} = 0.6m/s^2$ ) et du couple d'inclinaison sollicité ( $M_t^{max} = 100Nm$ ), et restent assez performants par rapport aux contrôleurs proposés dans la littérature (cf. Chapitre 39). Il est évident que les performances du **contrôleur LPV** sont plus satisfaisantes (la valeur de  $M_t$  est divisée par 2 et celle de  $a_{per}$  par 3).



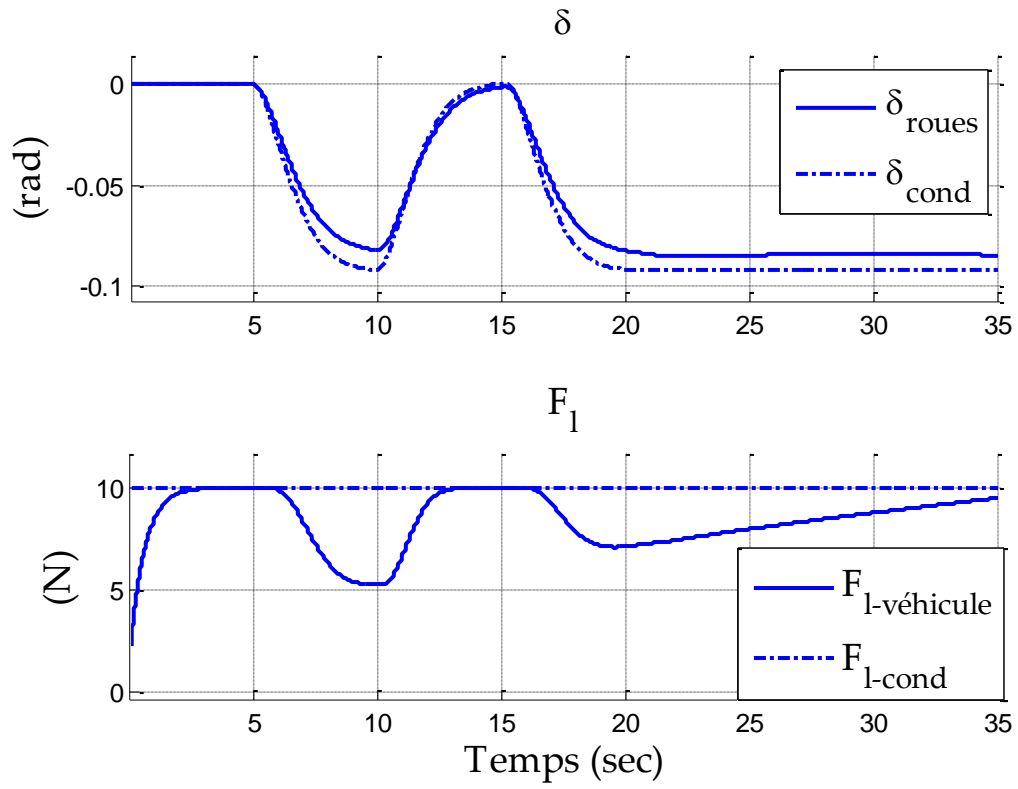


Figure 6. 10 : Angle de braquage et force de propulsion conducteur et en sortie du compensateur du véhicule avec contrôleur NL.

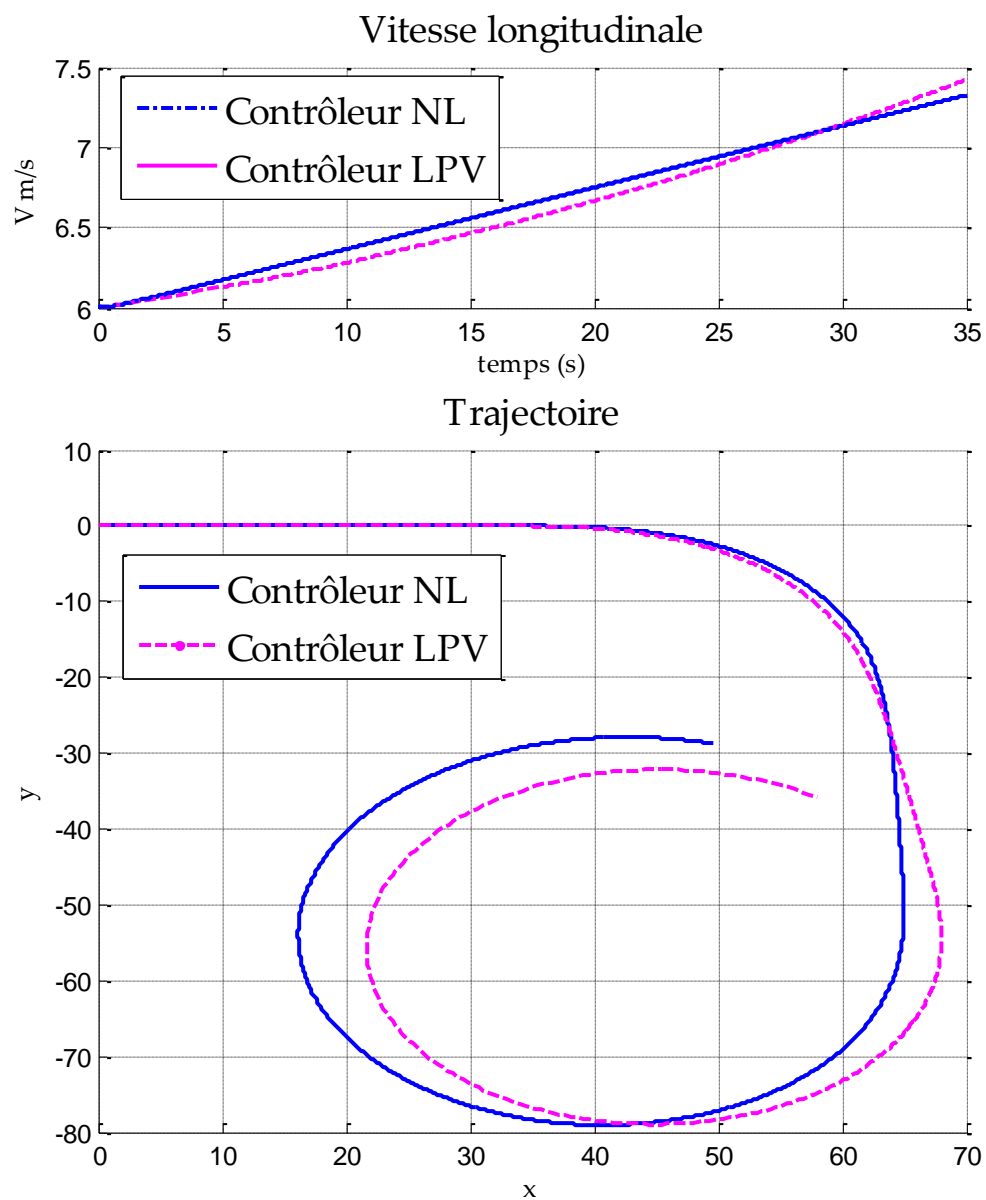


Figure 6. 11 : Vitesse et trajectoire du véhicule avec les contrôleurs NL et LPV

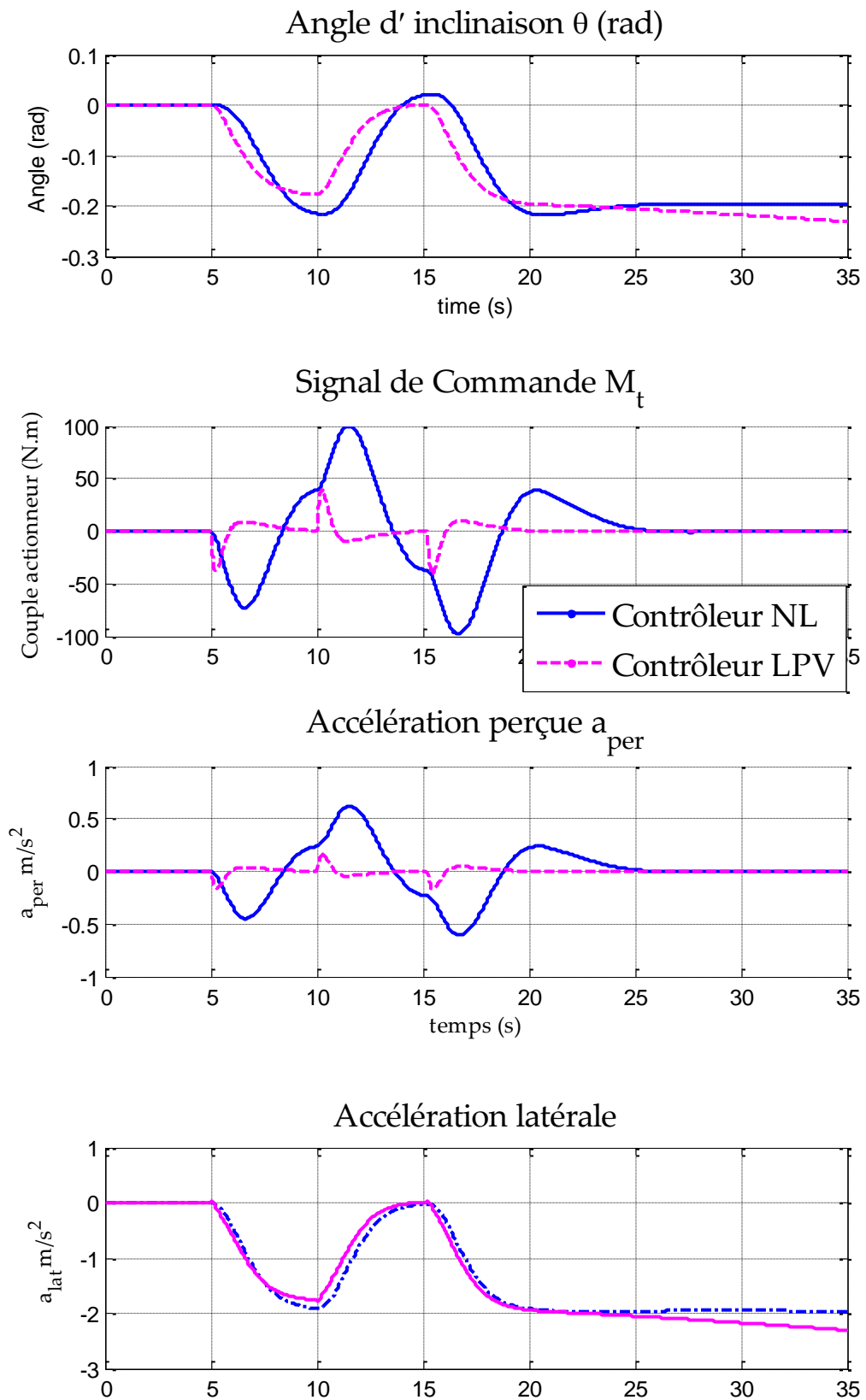


Figure 6. 12 : Angle d'inclinaison, couple d'inclinaison, accélération latérale perçue et accélération latérale du véhicule avec les contrôleurs NL et LPV

## 8. Conclusion

Ce dernier chapitre présente une perspective intéressante pour le contrôle des VEI. Si les chapitres 4 et 5 étaient consacrés à la synthèse de lois de commande linéaires robustes, la loi de commande proposée ici est non linéaire, à l'image du modèle du véhicule. Elle permet donc, en principe, d'améliorer le comportement aux grands mouvements d'un régulateur SDTC.

Après avoir introduit le concept de platitude, nous avons mis en évidence que le modèle à 5DDL (longitudinal – latéral) était bien plat, en exhibant un jeu de sorties plates dont nous avons explicité le sens physique. Le calcul du compensateur linéarisant a ensuite été présenté, et la linéarité du système bouclé par ce compensateur vérifiée. Finalement, afin d'apprécier les potentialités liées à cette démarche (commande NL), nous avons synthétisé un régulateur externe préliminaire constitué de trois PD indépendants, pilotant les trois sorties plates. Les résultats obtenus, quoique non optimisés, sont intéressants ; les objectifs de stabilisation latérale et de suivi de trajectoire sont atteints, avec des performances correctes. Les performances du contrôleur SDTC- LPV obtenu au chapitre 5 sont bien sûr plus avantageuses, mais des pistes existent pour améliorer les performances (et la robustesse) du contrôleur NL par choix d'un régulateur externe conçu intelligemment.

Nous n'avons pu mener cette piste à son terme, faute de temps, alors même que nous avons arrêté la voie de conception de la boucle externe qui semble pertinent, partageant avec le chapitre 5 le même critère de performance. Rappelons que le risque de la linéarisation par bouclage dans sa version habituelle réside dans le fait que l'on « efface » les dynamiques naturelles et une partie de la structure du système à contrôler. Une piste intéressante pour « réinjecter » une dimension plus physique au problème est celle proposée par (Franco et al. 2006). L'idée consiste à se ramener, non pas à des chaînes d'intrégrateurs, mais à une boucle interne qui partage les caractéristiques des modèles linéarisés tangents du système (*cf.* chapitre 2).

Du point de vue de la génération de trajectoire, comme énoncé dans les travaux de Fuchshumer (Fuchshumer 2005; Fuchshumer et al. 2005), ceci est encore un problème ouvert. Il est nécessaire de traduire en temps-réel et avec précision les actions du conducteur sur le volant et sur les pédales de frein et d'accélérateur en termes de trajectoire désirée.

## Chapitre 7 Conclusion et perspectives

---

L'utilisation de la voiture comme moyen de transport individuel est un principe aujourd'hui pour le moins questionné, au regard des problèmes d'embouteillage, de consommation énergétique et d'émission de polluants. Les véhicules étroits constituent une alternative intéressante aux voitures actuelles, du moins en milieu urbain, de nombreux constructeurs automobiles se lançant d'ailleurs dans le développement de prototypes. A mi-chemin entre une voiture et un cycle motorisé ces véhicules posent cependant la question de la sécurité, et de leur stabilité latérale en premier lieu. L'amélioration de la stabilité latérale de ces véhicules au moyen du contrôle automatisé de leur inclinaison a constitué le sujet central de ce mémoire.

Le **chapitre 1** a été consacré aux avancées industrielles concernant les véhicules étroits. Si certains constructeurs contournent le problème du contrôle dynamique de la stabilité latérale en « lestant » le véhicule, il ressort de notre travail bibliographique sur les véhicules étroits que la question du développement d'un dispositif d'inclinaison automatisé optimisé reste un problème ouvert de plusieurs points de vue, alors même que les efforts d'acteurs émergents (constructeurs) sur ce marché de niche redoublent.

Nous avons dédié le **chapitre 2** aux modèles de véhicules inclinables, de complexités diverses. En particulier, un **modèle à 5DDL** comportant les dynamiques latérales et longitudinales du véhicule a été proposé, **généralisant ainsi le modèle faisant référence dans la littérature sur les VEI** (R. Rajamani et al. 2003). Bien qu'assez complet, ce modèle reste manipulable et peut servir en terme de validation mais aussi de synthèse (cf. chapitre 6).

Nous avons centré le **chapitre 3** sur la compréhension du comportement dynamique des VEI et la problématique de stabilisation latérale en passant en revue différents moyens d'action possibles : DTC, STC, SDTC. L'approche conventionnelle pour assurer le contrôle de la dynamique latérale des VEI consistant à asservir l'angle d'inclinaison  $\theta$  a été remise en question, et nous avons proposé **de réguler directement l'accélération latérale, signal aisément mesurable** au moyen de la centrale inertielle embarquée ce type de véhicule.

Le chapitre 4 a introduit quant-à-lui la méthodologie de commande permettant de formaliser, de manière systématique, les problèmes de contrôle dynamique des VEI. Appliquée d'abord au cas du système DTC seul, la méthodologie a permis de traiter, en continuité et sans accroissement de complexité significatif, le cas multi-entrées du système SDTC (chapitre 5). Nous cherchons à **synthétiser des régulateurs structurés**, statiques ou d'ordre faible (action

intégrale ou filtre d'ordre réduit), afin d'aboutir à des solutions lisibles, facilement implémentables, exploitant uniquement les signaux mesurés. Développée dans un contexte  $H_2$ , afin d'exprimer un critère de performance facile à appréhender et gérer aisément les différents compromis de commande, la méthodologie proposée conduit efficacement à un problème d'optimisation bien posé, intégrant pondérations fréquentielles et modèles de l'environnement du système.

Les chapitres 4 et 5 ont traité respectivement de la **synthèse de contrôleurs DTC et SDTC**. Les contrôleurs obtenus améliorent significativement le comportement des véhicules étroits en virage, ceci grâce à trois idées principales : 1/ **le contrôle direct de l'accélération latérale perçue**, 2/ **l'utilisation optimisée de l'angle et de la vitesse de braquage à des fins de précommande** ; cette précommande permet d'anticiper l'inclinaison du véhicule (par rapport à la rétroaction), ce qui s'avère décisif en entrée de virage, et 3/ concernant le système SDTC, la synthèse d'un contrôleur multivariable, **pilotant de manière synchronisée les deux actionneurs** (moteur d'inclinaison et modulation de l'angle de braquage), qui engendre une réduction significative de l'accélération latérale du véhicule, comparé à la solution DTC pure, en modulant peu la trajectoire désirée par le conducteur. Cette solution est aussi avantageuse en termes d'énergie requise pour la stabilisation latérale, qui s'avère beaucoup plus faible qu'avec un système purement DTC. On peut facilement, sur la base des développements réalisés, évaluer les avantages et inconvénients du dispositif SDTC en fonction du taux d'hybridation (importance relative dévolue respectivement aux actions DTC et STC). Finalement, les régulateurs proposés, dont la robustesse a été analysée, mais conçus pour une vitesse longitudinale constante ont été interpolés pour obtenir des régulateurs paramétrés par la vitesse, dont nous avons montré qu'ils préservent un bon niveau de performance en dépit de variations potentiellement rapides de la vitesse.

Le chapitre 6 fait état d'un résultat important, en ce qu'il montre que le modèle non linéaire à 5 DDL proposé au chapitre 2, est un système plat. Un jeu de **sorties dites 'plates' ont ainsi été exhibées, dont le sens physique a été discuté**. En nous appuyant sur le caractère plat du modèle, nous avons conçu un retour d'état non linéaire découplant. La boucle externe a dès lors été conçue au moyen de régulateurs PI et PD. Les premiers résultats obtenus sont encourageants, mais ne constituent à nos yeux qu'un résultat préliminaire, en ce que l'objectif visé est un régulateur non-linéaire robuste, ayant des performances comparables à celles obtenues avec les régulateur LPV proposé au chapitre 5.

---

Les perspectives de ce travail sont multiples :

La première d'entre elle est naturelle. Au-delà des résultats proposés, qui permettent de mieux comprendre les questions génériques liées à l'utilisation de systèmes DTC et STC en vue d'automatiser l'inclinaison des véhicules étroits, il reste à montrer leur intérêt pour traiter, au-

delà des modèles « académiques » utilisés, le cas de véhicules prototypes. Ceci requiert la prise en compte des spécificités du véhicule visé et de certaines que nous n'avons pas prises en compte. Nous ne prétendons pas avoir résolu le problème dans son ensemble. Par ailleurs, il peut être intéressant de considérer plus précisément le moyen d'avoir la maîtrise du transfert de charge, par le biais de systèmes DTC et STC, en complément de l'utilisation de suspensions actives.

Une autre perspective importante consiste en la prise en compte du comportement du conducteur, de sa perception comme des ses actions, dans la dynamique latérale globale des véhicules étroits et inclinables. La capacité d'adaptation du conducteur vis-à-vis de la modulation de l'angle de braquage par le contrôleur SDTC proposé aux chapitres 5 ou 6 mériterait d'être évaluée. Des études dans ce sens ont été entamées à l'université de Bath, par l'équipe qui travaille sur le projet du 'Clever' (Van Poelgeest A. et al. 2007) et (Roberston J. et al. 2012). La prise en compte d'un modèle du conducteur lors de la synthèse des assistances à l'inclinaison constitue également une piste, à l'image de ce qui est proposé dans les travaux de (Saleh 2012). Le lien entre l'évolution temporelle de l'accélération latérale et la perception du conducteur (objectivation du ressenti) est aussi un sujet important.

Les autres pistes concernent l'automatique. Cette thèse, quoique présentant un caractère appliqué, fait appel à des notions variées en automatique : commande H2, mu-analyse, analyse de performance des systèmes LPV, platitude et linéarisation par bouclage. La synthèse H2-LPV et la commande non-linéaire robuste constitue deux thèmes qui offrent des possibilités d'approfondissement. C'est vers la recherche d'une loi de commande non linéaire robuste que porteraient nos prochains efforts. Si nous avons pu prouver la platitude du modèle à 5 DDL des VEI, et proposer un contrôleur non-linéaire découplant, la solution proposée pour la boucle externe, à base de régulateurs PD indépendants est trop réductrice. Les perspectives ici se situent dans la recherche d'une linéarisation par bouclage qui préserve la dynamique linéaire naturelle du système (linéarisé tangent). Cette étude s'inscrirait dans la lignée des travaux de (Franco et al. 2006). Il s'agirait ensuite, pour la boucle externe, de procéder à la synthèse d'un régulateur linéaire externe à la manière de ce qui a été proposé au chapitre 5. Une difficulté à surmonter porte sur la génération de trajectoire qui requiert l'exploitation de l'intention du conducteur.

## Références

---

- Apkarian, P., Gahinet, P. & Becker, G., 1995. Self-scheduled  $H_\infty$  Control of linear parameter varying system: A design example. *Automatica*, 31, p.1251-1261.
- Arzelier, D. et al., 2010. H2 for HIFOO. In <http://www.cs.nyu.edu/overton/software/hifoo/>.
- Bath University, 2002. United Kingdom. Available at: <http://www.bath.ac.uk/ptmc/research/projects.html>.
- Berote, J., Van Poelgeest, A., Darling, J., Edge, K. & Plummer, A., 2008. The dynamics of a Three-wheeled Narrow Track Tilting Vehicle. In Proceedings of FISITA World Automotive Congress. Munich, Germany.
- Berote, J.H., 2010. *Dynamics and Control of a Tilting Three Wheeled Vehicle*. Thèse de doctorat. Bath-UK: University of Bath.
- Bouali, A, Yagoubi, M & Chevrel, P, 2008. H2 gain scheduling control for rational LPV systems via a descriptor framework. In Proceedings of the 47th Conference on Decision and Control. Cancun Mexico.
- Bouali, Anis, 2008. *Approche descripteur pour l'analyse et la commande des systemes LPV rationnels*. Thèse de doctorat. Nantes : Université de Nantes.
- Carver, 2007. Available at: <http://www.carver-technology.com/DVCTechnology.shtml>.
- Chevrel, Philippe, 2002. H2 multivariable control methodology (Méthodologie de la commande par l'approche d'état). In *Automatique Linéaire*. IC2, Sous la direction de Ph. De Larminat. Paris, France: Hermès, p. 151-192.
- Chevrel, Philippe, 2000. *Méthodologie de Commande Multivariable - Methodologie de commande*. Polycopié de Cours de l'Ecole des Mines de Nantes.
- Chiou, J.C., Lin, C.Y., Chen, C.L. & Chien, C.P., 2009. Tilting Motion Control in Narrow tilting Vehicle Using Double Loop PID Controller. In Proceedings of the 7th Asian Control Conference. Hong Kong, China, p. 678-691.
- Chiou, J.-C. & Chen, C.-L., 2008. Modeling and Verification of a Diamond shape Narrow tilting Vehicle. *IEEE/ASME transactions on Mechatronics*, 13(6), p.678-691.
- Cluzel, S., 2000. *Calcul de la marge de retard multivariable*. Rapport de DEA, Nantes : Université de Nantes.



- Commuter, 2012. Rainbow Systems. Available at: <http://www.rainbowsystem.fr/>.
- Conte, G., Moog, C. & Perdon, A.M., 2007. *Algebraic Methods for Nonlinear Control systems* 2nd éd., London: Springer.
- Van Den Brink, C.R., Van Den Brink, A. & Kroonen, H.M., 1999. Self-stabilizing, directionally controllable vehicle with at least three wheels, United States Patent, us-5927424.
- Van Den Brink, C.R. & Kroonen, H.M., 1999. Tilting vehicle, United States Patent, us-6328125.
- Van Den Brink, C.R. & Kroonen, H.M., 2000. Tilting vehicle, United States Patent, us-6435522.
- Doyle, J., 1985. Structured uncertainty in control system design. In Proceedings of the 24th IEEE Conference on Decision and Control. Fort Lauderdale, USA, p. 260-265. [10.1109/CDC.1985.268842](https://doi.org/10.1109/CDC.1985.268842)
- Duc, G. & Font, S., 1999. *Commande H infinie et mu-analyse - des outils pour la robustesse* Hermes., Paris: Hermes.
- Fliess, M. et al., 1992. Sur les systèmes linéaires différentiellement plats. *Compte rendu de l'académie des Sciences de Paris*, I-315, p.619-624.
- Fliess, M., Lévine, J. & Rouchon, P., 1995. Flatness and defect of nonlinear systems: Introductory theory and examples. *International Journal of Control*, 61(6), p.1327-1361.
- Franco, A.L.D. et al., 2006. Robust Nonlinear Control associating Robust Feedback Linearization and  $H_\infty$  Control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(7), p. 1200-1207.
- Fred, S., 2009. X-by-wire. In Hauptseminar Transportation Systems- rapport. chemnitz-Allemagne.
- Fuchshumer, S., 2005. *Algebraic Linear Identification, Modelling, and Applications of Flatness-based Control*. Thèse de doctorat. Linz, Autriche: Johannes Kepler Universitat Linz.
- Fuchshumer, S., Schlacher, K. & Rittenschober, T., 2005. Nonlinear Vehicle Dynamics Control - A flatness Based Approach. In Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control. Sevilla, Spain, p. 6492-6497.
- Garrott, R., Monk, W.M. & Chrstos, J., 1988. Vehicle Inertial Parameters - Mesured Values and Approximation. In SAE Technical Paper, 881767.
- Hibbard, R. & Karnopp, D., 1996. Twenty First Century Transportation System Solutions- a New Type of Small, Relatively Tall and Narrow Active Tilting Commuter Vehicle. *Vehicle System Dynamics*, 25, p.321-347.

- Hifoo, Available at: <http://www.cs.nyu.edu/overton/software/hifoo/publications/>.
- Huang, Y. & Zhou, K., 1999. Robust Control of Uncertain Time Delay Systems. In Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control, CDC. Phoenix, USA.
- Khalil, W. & Creusot, D., 1997. SYMORO+: a system for the symbolic modelling of robots. *Robotica*, 15, p.153-161.
- Khalil, W. & Dombre, E., 2002. *Modeling, Identification and Control of robots* Hermes, Penton., Paris et Londres.
- Kidane, S., Alexander, L., Rajamani, R., Starr, P. & Donath, M., 2008. A fundamental investigation of tilt control systems for narrow commuter vehicles. *Vehicule System Dynamics*, 46(4), p.295-322.
- Kidane, S., Rajamani, R., Alexander, L., Starr, P. & Donath, M., 2010. Developpement and Experimental Evaluation of a Tilt Stability Control System for Narrow Commuter Vehicles. *IEEE Transactions on Control System Technology*, 18(6), p.1266-1279.
- Kidane, S., Alexander, L., Rajamani, R., Starr, P. & Donath, M., 2006. Road Bank Angle Considerations in Modeling and Control System Design for Narrow Tilt-Controlled Commuter Vehicles. In Proceedings of the 2006 American Control Conference. Minneapolis, USA.
- Kiencke, U. & Nielsen, L., 2000. *Automotive Control Systems for Engine, Driveline and vehicle*, New York- USA: Springer-Verlag.
- De Larminat, P., 1996. Standard Control Methodology (Contrôle d'état standard). In Paris: Collection pédagogique d'automatique, Hermès Sciences.
- De Larminat, P., 2000. Standard Control Methodology (Contrôle d'état standard). In Collection pédagogique d'automatique. Paris: Hermès Science Publications.
- Lumeneo, 2008. Smera. Available at: <http://www.lumeneo.fr/>.
- Maakaroun, S., 2011. *Modélisation et simulation dynamique d'un véhicule urbain innovant en utilisant le formalisme de la robotique*. Thèse de doctorat. Nantes : Ecole des Mines de Nantes.
- Martin, P., Murray, R.M. & Rouchon, P., 2003. *Flat systems, equivalence and trajectory generation - Rapport technique*,
- Moreau, X. & Serrier, P., 2007. La dynamique véhicule et les modèles associés. In Présentation au GDRMACS. Reims.
- Mourad, L., Claveau, F. & Chevrel, Ph., 2011. A Lateral Control Strategy for Narrow Tilting Commuter Vehicle Based on the Perceived Lateral Acceleration. In Proceedings of the IFAC world congress 2011. Milano, Italy.

- Mourad, L., Claveau, F. & Chevrel, Ph., 2012a. Commande Multivariable STC/DTC pour la Stabilité Latérale de Véhicules Etroits et Inclinables. In Conférence Internationale Francophone d'Automatique. Grenoble, France.
- Mourad, L., Claveau, F. & Chevrel, Ph., 2012b. Design of a two DOF gain scheduled frequency shaped LQ controller for Narrow Tilting Vehicles. In Proceedings of the American Control Conference. Montréal, Canada.
- Piyabongkran D., Keviczky T. & Rajamani R., 2004. Active Direct Tilt Control For Stability Enhancement of Narrow Commuter Vehicle. *International Journal of Automotive Technology*, 5(2), p.77-88.
- Plankensteiner, M., 2010. [http://www.automotive-eetimes.com/en/steer-by-wire-a-solution-to-many-design-challenges.html?cmp\\_id=71&news\\_id=222900816](http://www.automotive-eetimes.com/en/steer-by-wire-a-solution-to-many-design-challenges.html?cmp_id=71&news_id=222900816).
- Van Poelgeest A., Edge K. & Darling J., 2007. Developement of a Steer tilt controller for a three wheeled tilting vehicle. In Proceedings of the ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, IMECE. Seattle, USA.
- Preumont, A., 1997. *Vibration Control of Active Structures* Kluwer Academic Publishers.,
- Prodrive, 2005. Naro Prodrive. Available at: <http://www.naro.co.uk/>.
- Rajamani, R., Gohl, J., Alexander, L. & Starr, P., 2003. Dynamics of Narrow Tilting Vehicles. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*. 9(2), p.209-231.
- Renault, 2012. Twizy. Available at: <http://www.renault.fr/gamme-renault/vehicules-electriques/twizy/twizy/cest-quoi-twizy/index.jsp?ORIGIN=liens-commerciaux&CAMPAIGN=twizy&gclid=CPXrqZP47rICFcfKtAodiAsA1g&mckv=mkwid%7Cs7ZIUjkaG%7Cpcrid%7C10814802909%7Cplid%7C%7Ckword%7Ctwizy%7C>.
- Roberston J., Darling J. & Plummer A., 2012. Path Following Performance of Narrow Tilting Vehicles Equipped with Active steering. In Proceedings of the 11th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis. Nantes, France.
- Roquero, N. & Enric, F.C., 2010. A Sliding Mode Controlled Three Wheels Narrow Vehicle For Tow Passengers. In Proceedings of the 11th International Workshop on Variable Structure Systems. Mexico.
- Roquero, N., Enric, F.C. & Marcelo G., D.F., 2010. A Sliding Mode Controlled Tilting Three Wheeled Narrow Vehicle. In Proceedings of the XVII Congresso Brasileiro de Automatica. Bonito-MS, Brazil.
- Roquero, N., Marcelo G., D.F. & Enric, F.C., 2011. Sliding Mode Controller and Flatness Based set-Point Generator for a Three Wheeled Narrow Vehicle. In Proceedings of the 18th IFAC World Congress. Milano, Italy.

- Roquiere, N., Rodrigo, D.S.V. & Marcelo G., D.F., 2010. Tilting Control of a Three Wheeled Vehicle by Steering. In Proceedings of XVII Congresso Brasileiro de Automatica. Bonito-MS, Brazil.
- Schulz, P., 2008. Energy and Environment: Key challenges for the automotive industry, Présentation Renault eco2.
- Scottish Household, 2010. Scottish Household Survey Travel Diary Results. Available at: <http://www.scotland.gov.uk/Topics/Statistics/Browse/Transport-Travel/TrendCarOccupancy>.
- So, S.-G. & Karnopp, D., 1997a. Active Dual Mode Tilt Control for Narrow Ground Vehicles. *Vehicle System Dynamics*, 27, p.19-36.
- So S.-G. & Karnopp D., 1997b. Switching Strategies for Narrow Ground Vehicles with Dual Mode Automatic tilt Control. *International Journal of Vehicle Design*, 18(5 (special issue)), p.518-532.
- SynergEthic, 2007. Tilter. Available at: <http://www.tilter.eu/>.
- Tango, 2004. Coimmuter car. Available at: <http://www.commutercars.com/>.
- Torga, 2007. Available at: <http://www.torga.fr/index.html>.
- Toyota PM, 2003. PM. Available at: <http://www.toyota.com/concept-vehicles/pm.html>.
- Véléance, 2011. Available at: <http://www.veleance.fr/>.
- Wonham, W.M., 1985. *Linear multivariable control: a geometric approach*, Springer.
- Yagoubi, M., Chevrel, Ph. & Claveau, F., 2007. An extended state-feedback H2 controller for descriptor systems. In Proc. 3<sup>rd</sup> Ifac Symposium on System, Structure and Control. Iguassu Falls, Brazil.
- Zhou, K., Doyle, J. & Glover, K., 1996. *Robust and optimal control*, Prentice Hall.

## Annexes

### 1. Annexe 1 : Modèle linéarisé du véhicule pour $\theta \neq 0$

Soit :,

$$a = 2(C_f + C_r)$$

$$b = 2(C_f l_f - C_r l_r)$$

$$c = 2(\lambda_f + \lambda_r)$$

$$d = (I_x + mh^2 \sin^2 \theta)$$

$$A_{43} = \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial \theta} = \frac{c' \times d - c \times 2mh^2 \sin \theta \cos \theta}{d^2}$$

$$c = \frac{ha(\cos \theta) \dot{y}}{V_x} + \frac{hb(\cos \theta) \dot{\psi}}{V_x} + mgh \sin \theta - mh^2 \dot{\theta}^2 \cos \theta \sin \theta - ch \cos \theta - 2C_f h \cos \theta \delta$$

$$c' = -\frac{ha(\sin \theta) \dot{y}}{V_x} - \frac{hb(\sin \theta) \dot{\psi}}{V_x} + mgh \cos \theta - mh^2 \dot{\theta}^2 (1 - 2 \sin^2 \theta) - ch(\cos \theta - \theta \sin \theta) + 2C_f h \sin \theta \delta$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{a}{mV_x} - \frac{ah^2 \cos^2 \theta}{V_x \text{den}} & -V_x - \frac{b}{mV_x} - \frac{bh^2 \cos^2 \theta}{V_x \text{den}} & \frac{c}{m} - hA \cos \theta & 2h\dot{\theta} \sin \theta + 2mh^3 \dot{\theta} \cos^2 \theta \sin \theta \\ \frac{b}{I_z V_x} & \frac{2(C_f l_f^2 + C_r l_r^2)}{I_z V_x} & \frac{2(C_f l_f^2 + C_r l_r^2)}{I_z V_x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{ha \cos \theta}{V_x \text{den}} & \frac{hb \cos \theta}{V_x \text{den}} & A_{43} & -2mh^2 \dot{\theta} \cos \theta \sin \theta \end{bmatrix}$$

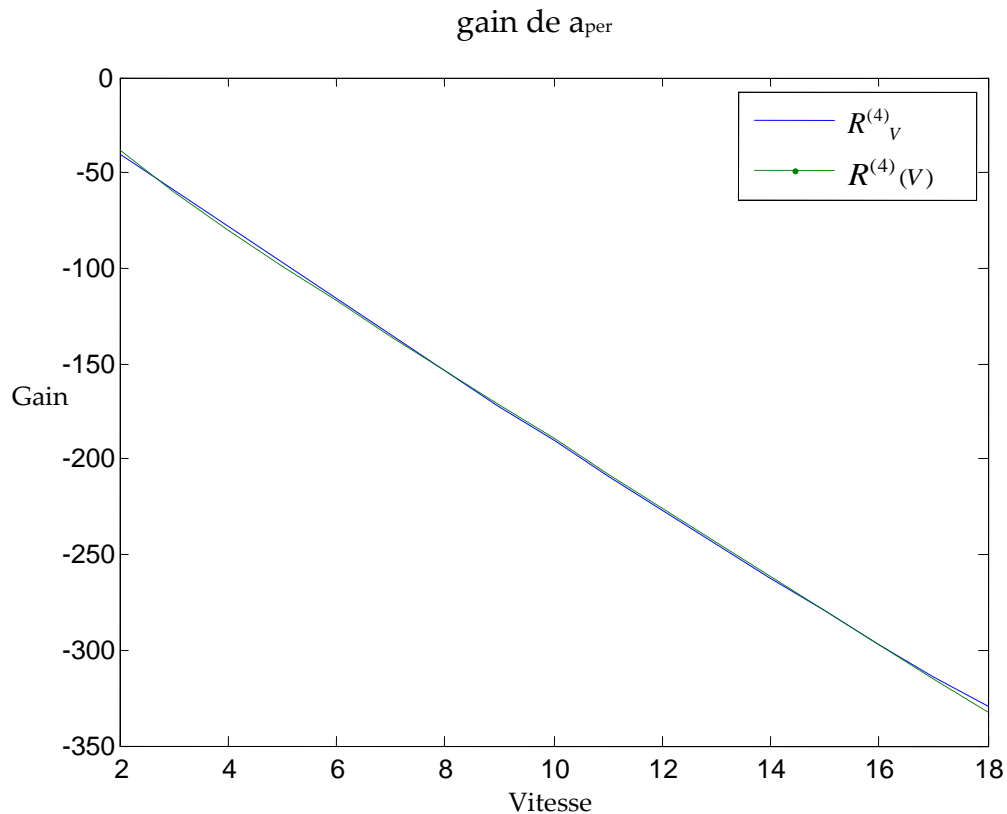
$$B = \begin{bmatrix} \frac{2C_f}{m} + \frac{2C_f h^2 \cos^2 \theta}{d} & -\frac{h \cos \theta}{d} \\ \frac{2l_f C_f}{I_z} & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{2C_f h \cos \theta}{d} & \frac{1}{d} \end{bmatrix}$$

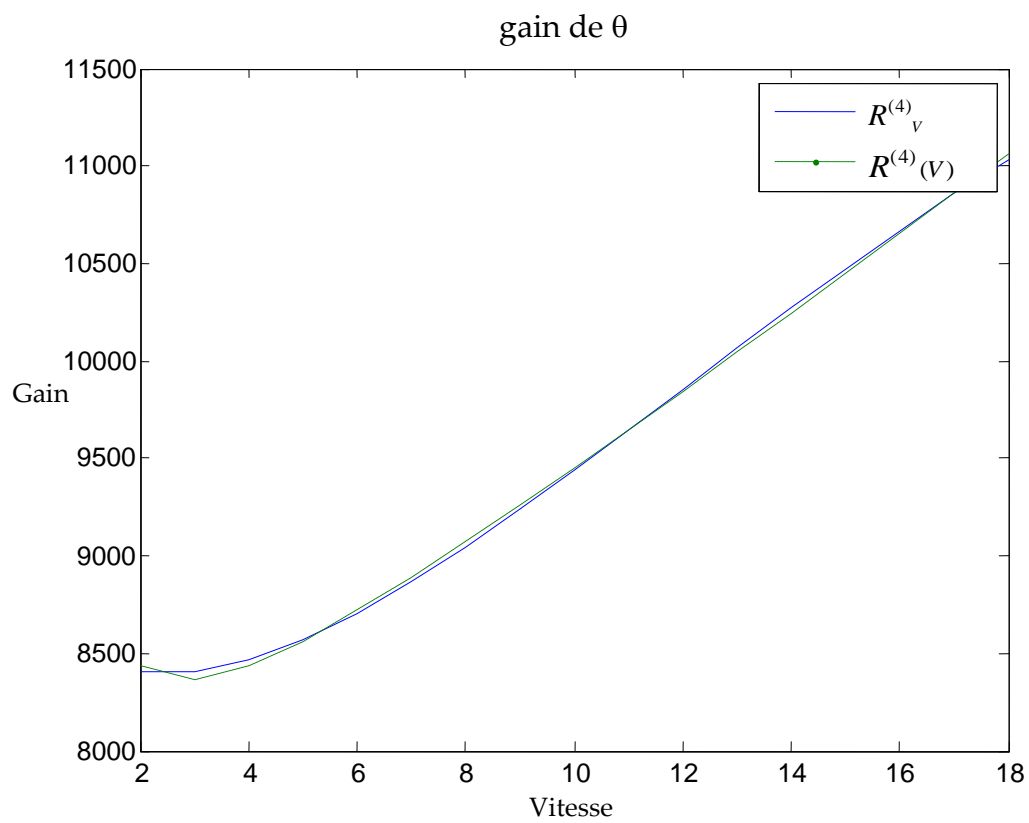
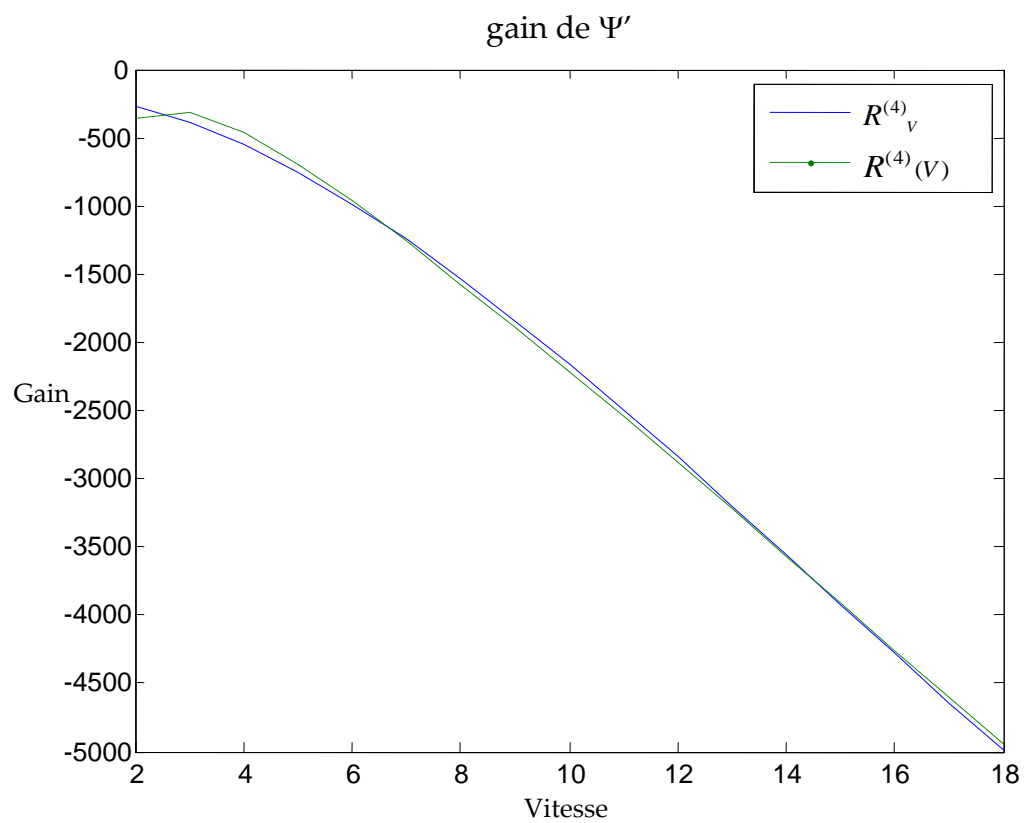
On remarque que ces matrices dépendent de  $\theta, \dot{\theta}, \dot{y}, \dot{\psi}, V_x$ . Donc pour toute valeur de  $\theta$  on calcule les valeurs de  $\dot{\theta}, \dot{y}, \dot{\psi}$  correspondantes, on choisit la vitesse  $V_x$ , et on injecte ces valeurs dans les expressions des A et B pour obtenir le modèle linéarisé autour du point correspondant.

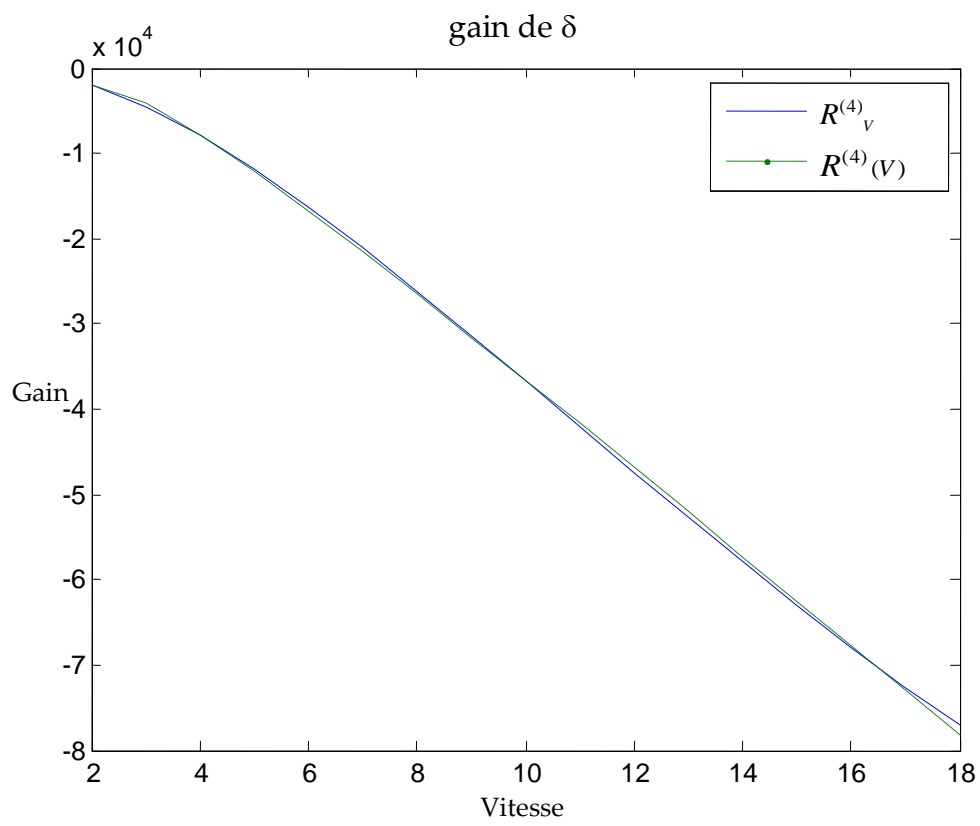
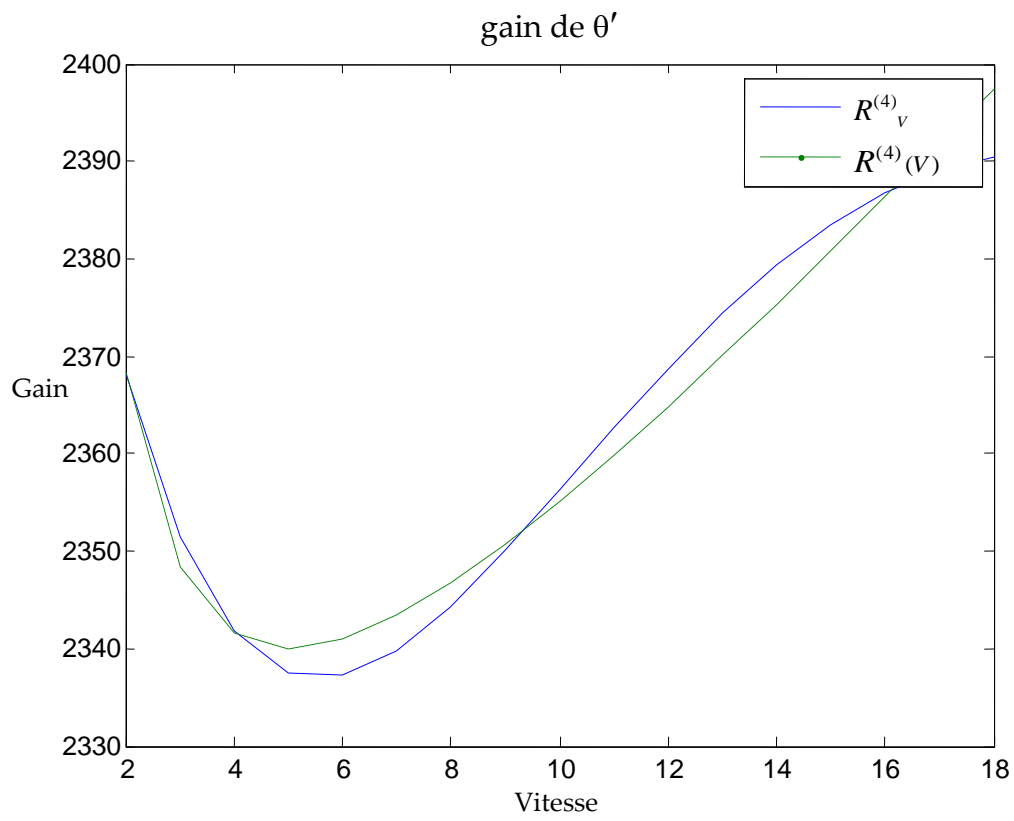
## 2. Annexe 2 : Paramètres du modèle

- $l_f = 0.58\text{m}$  : distances longitudinales du centre de gravité aux roués avant.  
 $l_r = 0.72\text{m}$  : distances longitudinales du centre de gravité aux roués arrière.  
 $h = 0.6\text{ m}$  : hauteur au sol du centre de gravité.  
 $m = 275\text{ kg}$  : masse du véhicule.  
 $I_z = 150\text{kg m}^2$  : Moments d'inertie de lacet du véhicule.  
 $I_x = 80\text{kg m}^2$  : Moments d'inertie de roulis du véhicule.  
 $C_f = 10^4\text{ kg m}^2/\text{s}^2$  : raideur latérales des roues avants.  
 $C_r = 6500\text{kg m}^2/\text{s}^2$ : raideur latérales des roues arrières.  
 $\lambda_f = 1000\text{N/rad}$  : raideur de carrossage des roues avant/ arrière.  
 $\lambda_r = 2000\text{ N/rad}$  : raideur de carrossage des roues avant/ arrière.  
 $g = 9.81\text{ m/s}^2$  : constante de gravité.

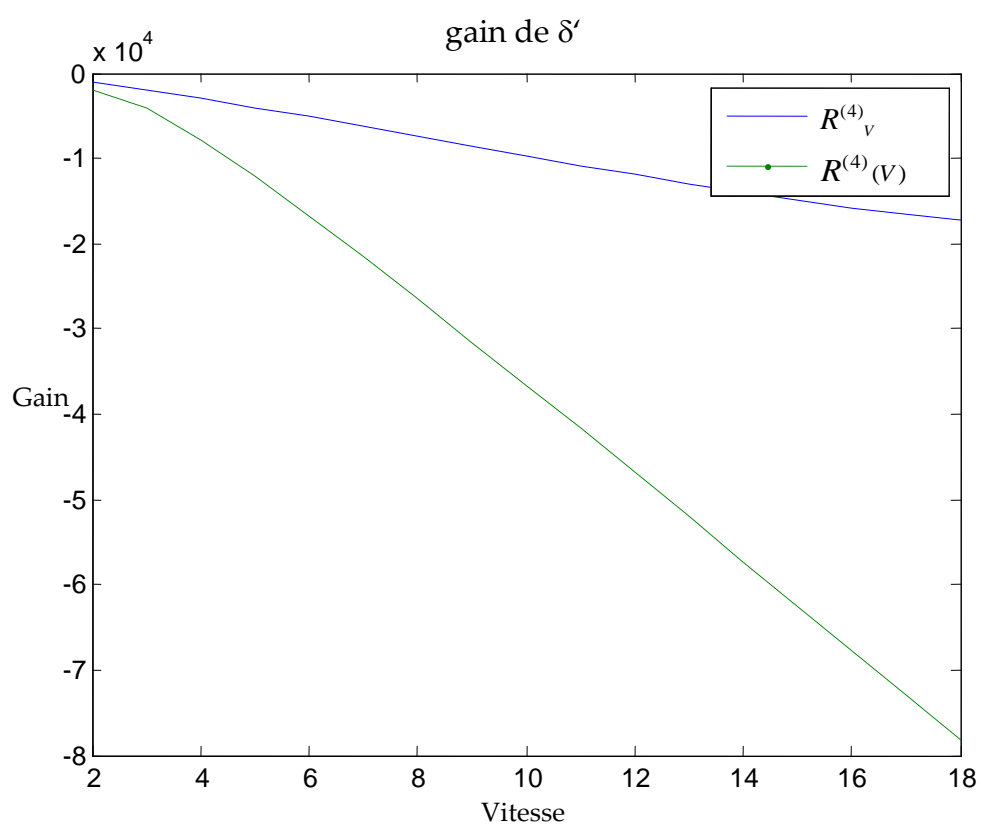
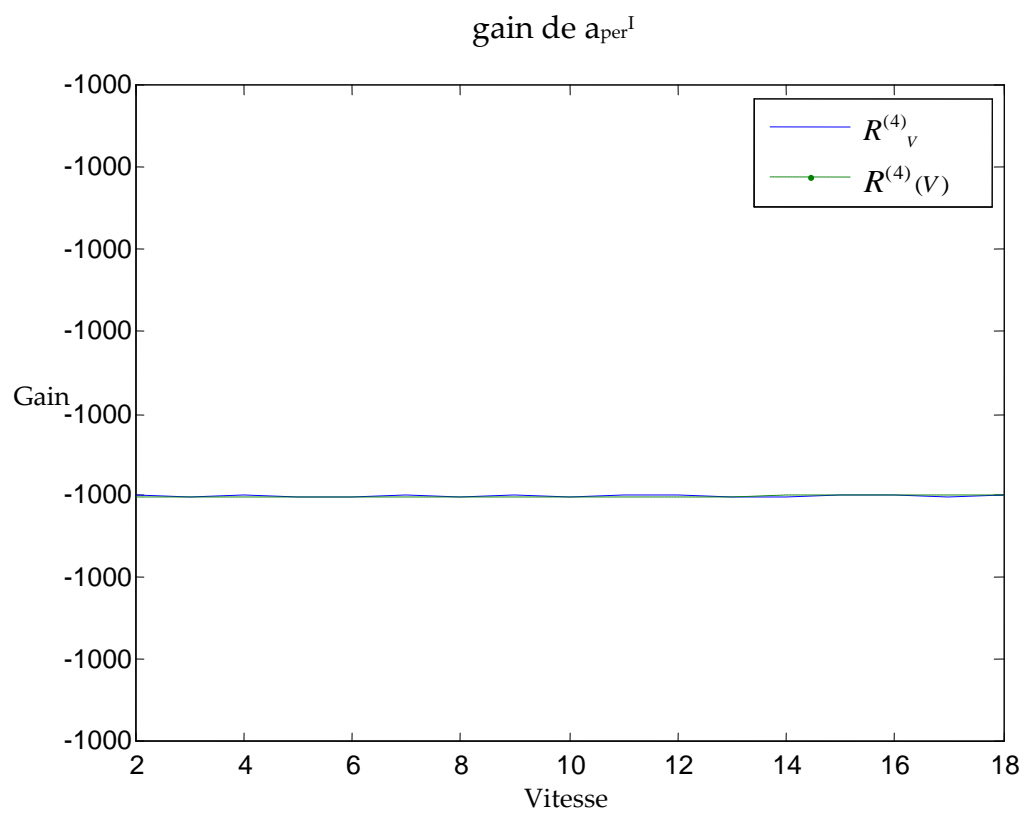
## 3. Annexe 3 : variations des gains du régulateur 4 avec la vitesse longitudinale $V_x$











#### 4. Annexe 4 : Programme Matlab pour le calcul du rang de la matrice de découplage $M$ en utilisant la 'symbolic toolbox'

```
clear all;clc

syms ix m h cf cr lf lr iz ix lamh lamf gamma v beta r delta deltap Fl Flf
Flr Fsr Fsf L go w1 w2 w3 theta thetap thetapp thetapp1 g Mt sin2del M11
M12 M13 M21 M22 M23 M31 M32 M33

%% equations d'etat (sauf thetapp-remplacée plus tard)

vp=(Fsf*sin(beta-delta)+Flf*cos(beta-delta)+Fsr*sin(beta)+Flr*cos(beta))/m-
h*(thetapp*cos(theta)-sin(theta)*thetap^2)*sin(beta);

betap=-r+(Fsf*cos(beta-delta)-Flf*sin(beta-delta)+Fsr*cos(beta)-
Flr*sin(beta))/(m*v)-h*(thetapp*cos(theta)-
sin(theta)*thetap^2)*cos(beta)/v;

rp=(lf*Fsf*cos(delta)+lf*Flf*sin(delta)-lr*Fsr)/iz;

%thetapp=(m*h*sin(theta)*(g-cos(theta)*thetap^2)-
(Fsf*cos(delta)+Fsr)*h*cos(theta)+Mt)/(ix+m*h*h*sin(theta)^2);

%% definition du vecteur z / des sorties plates et leurs dérivées

z1=v*cos(beta);
z2=v*sin(beta)-iz*r/(m*lf)+h*thetap*cos(theta);
z3=theta;
z3p=thetap;
z3pp=thetapp;

%% derivation des sorties plates

z1p=vp*diff(z1,v)+betap*diff(z1,beta)+rp*diff(z1,r)+thetap*diff(z1,theta)+t
hetapp*diff(z1,thetap);
z1p=simple(z1p);z1p=simple(z1p);

%
%              -Fsf sin(delta) + Flf cos(delta) + Flr
%      z1p = sin(beta) r v + -----
%                                  m

z2p=vp*diff(z2,v)+betap*diff(z2,beta)+rp*diff(z2,r)+thetap*diff(z2,theta)+t
hetapp*diff(z2,thetap);
z2p=simple(z2p);z2p=simple(z2p);z2p=simplify(z2p);

z2p=collect(z2p, Fsr);
z2p=collect(z2p, Fsf);
z2p=collect(z2p, Flr);
z2p=collect(z2p, Flf);

%
%      (-lf - lr) Fsr
%      z2p= - ----- - v cos(beta) r = L Fsr - v cos(beta) r
%              m lf

% calcul de z2pp
```

```

Fsr1=-cr*((v*sin(beta)-lr*r)/(v*cos(beta))); %nous remplacons Fsr par son
expression

z2pp=vp*diff(z2p,v)+betap*diff(z2p,beta)+rp*diff(z2p,r)+thetap*diff(z2p,the
ta)+thetapp*diff(z2p,thetap)+L*(vp*diff(Fsr1,v)+betap*diff(Fsr1,beta)+rp*di
ff(Fsr1,r));

z2pp=simple(z2pp);z2pp=simple(z2pp);z2pp=simple(z2pp);
z2pp=expand(z2pp);
z2pp=collect(z2pp,Fsf);
z2pp=collect(z2pp,Flf);
z2pp=collect(z2pp,Fsr);
z2pp=collect(z2pp,Flr);
z2pp=simple(z2pp);z2pp=simple(z2pp);z2pp=simple(z2pp);
z2pp=expand(z2pp);
z2pp=collect(z2pp,Fsf);
z2pp=collect(z2pp,Flf);
z2pp=collect(z2pp,Fsr);
z2pp=collect(z2pp,Flr);

thetapp=(m*h*sin(theta)*(g-cos(theta)*thetap^2)-
(Fsf*cos(delta)+Fsr+Flf*sin(delta))*h*cos(theta)+Mt)/(ix+m*h*h*sin(theta)^2
);
z3pp=thetapp;

%remplacement de Flf et Flr par leurs valeurs en fonction de Fl et gamma

Flf=(1-gamma)*Fl;
Flr=gamma*Fl;

% et substitution dans le vecteur z
z1p=subs(z1p);z2pp=subs(z2pp);z3pp=subs(z3pp);

%% calcul de la matrice M

% Avec les variables dFsfd et dFsrd tel que :
% dFsfd=diff(Fsf1,delta);
% dFsrd=diff(Fsr1,delta);
% Fsf et Fsr dependent du vecteur d'état et l'entrée delta uniquement

M11=diff(z1p,delta)+diff(z1p,Fsf)*dFsfd;
M12=diff(z1p,Fl);
M13=diff(z1p,Mt);
M21=diff(z2pp,delta)+diff(z2pp,Fsf)*dFsfd+diff(z2pp,Fsr)*dFsrd;
M22=diff(z2pp,Fl);
M23=diff(z2pp,Mt);
M31=diff(z3pp,delta)+diff(z3pp,Fsf)*dFsfd+diff(z3pp,Fsr)*dFsrd;
M32=diff(z3pp,Fl);
M33=diff(z3pp,Mt);

M=[ M11 M12 M13; M21 M22 M23; M31 M32 M33];
M=simple(M);M=simple(M);M=simplify(M);

%% calcul du déterminant de M

```

```

detM=det (M) ;

detM=collect (detM, Fsr) ;
detM=collect (detM, Fsf) ;
detM=collect (detM, Fl) ;
detM=simple (detM) ; detM=simple (detM) ; detM=simplify (detM) ;
% detM=collect (detM, Fsr) ;
% detM=collect (detM, Fsf) ;
% detM=collect (detM, Fl) ;
L=(lf+lr)/(m*lf) ; %gamma=1;
detM=subs (detM) ;
detM=simple (detM) ; detM=simplify (detM) ;
detM=collect (detM, Fsr) ;
detM=collect (detM, Fsf) ;
detM=collect (detM, Fl) ;

%detM=- (cr*lr^2*m*lf+cr*lr*m*lf^2-cr*iz*lr-cr*iz*lf+2*lr*iz*gamma*cr-
gamma^2*cr*iz*lr-
gamma^2*cr*iz*lf+gamma^2*cos (delta) *cr*iz*lf+gamma^2*v^2*cos (beta) ^2*lf^2*c
os (delta) *m^2-
gamma^2*cr*lr*cos (delta) *lf^2*m+gamma*cr*lr^2*cos (delta) *lf*m+gamma*cr*lr*c
os (delta) *lf^2*m+2*cr*iz*gamma*lf-gamma*cos (delta) *cr*iz*lf-
gamma^2*cr*lr^2*cos (delta) *lf*m+2*v^2*cos (beta) ^2*lf^2*m^2*gamma-
gamma*v^2*cos (beta) ^2*lf^2*cos (delta) *m^2-
gamma^2*v^2*cos (beta) ^2*lf^2*m^2+gamma^2*cos (delta) *cr*iz*lr-
v^2*cos (beta) ^2*lf^2*m^2-lr*cos (delta) *iz*gamma*cr+gamma^2*cr*lr*lf^2*m-
2*cr*lr*gamma*lf^2*m-
2*cr*lr^2*gamma*lf*m+gamma^2*cr*lr^2*lf*m)/lf/m^3/v/cos (beta) / (-
m*h^2*cos (theta) ^2+ix+m*h^2)/iz*Fl- (sin (delta) *cr*iz*gamma*lr-
cr*lr*sin (delta) *gamma*lf^2*m+sin (delta) *cr*iz*gamma*lf-
cr*lr^2*sin (delta) *gamma*lf*m+v^2*cos (beta) ^2*lf^2*sin (delta) *m^2*gamma)/lf
/m^3/v/cos (beta) / (-m*h^2*cos (theta) ^2+ix+m*h^2)/iz*Fsf- (-
dFsr*cr*lr^3*gamma*m-
dFsr*cr*lr^2*gamma*m*lf+dFsr*cr*iz*gamma*lf+dFsr*cr*iz*gamma*lr-
dFsr*cr*iz*gamma*lf-dFsr*cr*iz*gamma*lr-dFsr*cr*lr*gamma*lf^2*m-
dFsr*cr*lr^2*gamma*lf*m-dFsr*v^2*cos (beta) ^2*lr*m^2*cos (delta) *gamma*lf-
dFsr*v^2*cos (beta) ^2*lf^2*m^2+dFsr*v^2*cos (beta) ^2*lr*m^2*cos (delta) *lf+d
Fsr*cr*iz*cos (delta) *gamma*lf+dFsr*v^2*cos (beta) ^2*lf^2*m^2*gamma+dFsr*v
^2*cos (beta) ^2*lr*m^2*gamma*lf-
dFsr*v^2*cos (beta) ^2*lf^2*cos (delta) *m^2*gamma+dFsr*cr*iz*cos (delta) *gamma
*lr-dFsr*cr*lr^3*cos (delta) *m-dFsr*cos (delta) *cr*iz*gamma*lr-
dFsr*cr*iz*cos (delta) *lf-dFsr*cos (delta) *cr*iz*gamma*lf-
dFsr*cr*iz*cos (delta) *lr+dFsr*cr*lr^3*cos (delta) *gamma*m+dFsr*cr*lr^2*cos
(delta) *gamma*m*lf-
dFsr*cr*lr^2*cos (delta) *m*lf+dFsr*cr*lr*cos (delta) *gamma*lf^2*m+dFsr*cr*
lr^2*cos (delta) *gamma*lf*m-dFsr*cr*iz*lr-
dFsr*cr*iz*lf+dFsr*cr*lr*lf^2*m+dFsr*cr*lr^2*lf*m)/lf/m^3/v/cos (beta) / (-
m*h^2*cos (theta) ^2+ix+m*h^2)/iz

```

**Application au cas  $\gamma=1$  et remplacement de  $F_{sf}$  et  $F_{sr}$  par leur expressions :**

```

gamma=1;
detM=subs (detM) ;
detM=simple (detM) ; detM=simplify (detM) ;
detM=collect (detM, Fsr) ;

```

```
detM=collect(detM, Fsf);
detM=collect(detM, Fl);
```

Lorsque  $\gamma=1$  le déterminant s'écrit:

$$\det(M) = \frac{[C_r(l_f + l_r)(I_z / (ml_f) - l_r) + ml_f v^2 \cos^2 \beta](\partial_\delta F_{sf} \cos \delta - F_{sf} \sin \delta) + [C_r(l_f + l_r)(I_z / (ml_f) - l_r^2 / l_f) - ml_r v^2 \cos^2 \beta] \partial_\delta F_{sr}}{I_z m^2 v \cos \beta (I_x + m h^2 \sin^2 \theta)}$$

- Le determinant est non défini si  $v=0$  ou  $\beta=\pi/2$ .
- Le determinant est indépendant des valeurs de  $r$ ,  $\theta$  et  $\dot{\theta}$
- Le determinant est nul si  $v$ ,  $\beta$  et  $\delta$  sont liés par la relation suivante :  $\text{num}(\det M)=0$ .

**Remarque :** Dans ces conditions, l'expression de  $\det(M)$  est indépendante de  $F_l$ .

Considérons maintenant les expressions  $F_{sf}$  et  $F_{sr}$  décrites par la relation (6.9), et calculons  $v\_s$  la valeur de  $v$  en fonction de  $\beta$  et  $\delta$  qui annule  $\text{num}(\det M)$  :

```
Fsr1=-cr*((v*sin(beta)-lr*r)/(v*cos(beta)));
Fsfl= cf*sin(delta);
dFsfd=diff(Fsfl,delta);
dFsrd=diff(Fsr1,delta);

detM1=subs(detM1);detM1=simple(detM1);
v_s=solve(detM1,v);v_s=simple(v_s);

% (cr*(lf+lr)*(m*lf*lr-iz))^(1/2)/cos(beta)/lf/m
% -(cr*(lf+lr)*(m*lf*lr-iz))^(1/2)/cos(beta)/lf/m
```

**Remarque :** Dans ces conditions, la solution  $v\_s$  est indépendante de l'entrée  $\delta$ .

### **Application numérique :**

```
h=0.6;m=275;cf=10000;cr=6500;lf=0.58;lr=0.72;ix=80;iz=150;lamr=2000;lamf=1000;g=9.81;
v_s=subs(v_s);v_s=simple(v_s)

%v_s=
% 26/319*i*1758^(1/2)/cos(beta)
% -26/319*i*1758^(1/2)/cos(beta)
```

En remplaçant les paramètres par leurs valeurs numériques, (cf. annexe 2) nous retrouvons une solution complexe (imaginaire pure):

$$v = \pm 3.4174i / \cos \beta$$

La solution imaginaire n'étant pas réalisable, nous concluons ainsi, que dans les conditions de notre problème, la matrice  $M$  est toujours de rang plein.

Lama Mourad

## Contrôle actif de l'accélération latérale perçue d'un véhicule automobile étroit et inclinable

### Active Lateral acceleration control of a narrow tilting vehicle

#### Résumé

Les Véhicules Étroits et Inclinables (VEI) sont la convergence d'une voiture et d'un motocycle. Un mètre de largeur seulement suffit pour transporter une ou deux personnes en Tandem. Les VEI sont conçus dans le but de résoudre partiellement les problèmes de trafic routier, de minimiser la consommation énergétique et l'émission de polluants. De par leurs dimensions (ratio hauteur/largeur), ces véhicules doivent s'incliner en virage pour rester stable en compensant l'effet de l'accélération latérale. Cette inclinaison doit dans certains cas être automatique : elle peut être réalisée à l'aide d'un couple d'inclinaison généré par un actionneur dédié (système DTC), soit encore en modulant l'angle de braquage des roues (Système STC). Nous avons proposé dans ce mémoire une méthodologie de synthèse d'un régulateur structuré minimisant la norme  $H_2$  d'un problème bien posé au bénéfice d'une régulation optimisée de l'accélération latérale, considérant tour à tour les systèmes DTC et STC. Les régulateurs proposés sont paramétrés par la vitesse longitudinale et s'avèrent performants et robustes, et les moyens de réglages proposés permettent d'étudier l'intérêt relatif d'une solution DTC pure ou mixte DTC/STC, permettant de supporter les développements futurs sur le sujet. L'originalité des solutions proposées en regard des études rencontrées dans la littérature porte en particulier sur le fait de choisir de réguler directement l'accélération latérale perçue (plutôt que l'angle d'inclinaison), en anticipant la prise de virage par la prise en compte des angles et vitesse de braquage. L'optimisation de la régulation permet de réduire de manière importante le couple d'inclinaison requis, et l'accélération latérale subie par les passagers est faible. Tous les développements proposés s'appuient naturellement en amont sur un travail de modélisation (recherche du modèle juste nécessaire), et de bibliographie conséquent. Le modèle retenu comprend 5 degrés de libertés. Nous avons démontré qu'il possédait la propriété intéressante d'être *plat*, et avons utilisé cette propriété pour ouvrir des perspectives relatives à la conception d'un régulateur non-linéaire robuste, susceptible *a priori* d'accroître les performances dans le cas de « grands mouvements ». Au contraire de ce qui existe dans la littérature, le régulateur multivariable conçu pour le système SDTC permet le contrôle coordonné des actions sur les systèmes STC et DTC.

#### Mots clés

Véhicule Étroit Inclinable, Dynamique Véhicule, Stabilité Latérale, Commande Robuste, Commande  $H_2$ , Régulateur Interpolé, Commande par Platitude

#### Abstract

Narrow Tilting Vehicles (NTV) are the convergence of a car and a motorcycle. One meter wide, these vehicles are designed for one or two people sitting the one in front the other. The idea behind the conception of NTV is the minimization of traffic congestion, energy consumption and pollutant emission. But because of their dimensions, these cars would have to lean into corners in order to compensate for the lateral acceleration and maintain their stability. The tilting should be automatic, and can be achieved by a tilting torque generated by a dedicated tilting actuator (DTC) or by modifying the steering angle (STC) or both (SDTC). In this thesis, we first propose a methodology for the design of an output feedback structured regulator, minimizing the  $H_2$  norm of a well-posed problem, built to optimize the lateral acceleration of the NTV, considering DTC and SDTC systems. The designed controllers, with the longitudinal velocity as a parameter, lead to the minimization of the tilting torque and of the lateral acceleration perceived by the driver, and have good performances as well as good robustness properties. Furthermore, the tuning methodology allows the comparison of a pure DTC solution and a mixed SDTC alternative. Compared to the literature, the originalities in this thesis are the direct control of the measured value of the lateral acceleration (instead of the tilting angle), and the anticipation of the tilt, thanks to the use of the steering angle and angular velocity. Furthermore, the SDTC solution allows to drive both the STC and DTC systems in a coordinated manner. The design strategies are based on a preliminary study of vehicle models, and a design model with 5 DoF was developed. We demonstrated that the model has the nice property to be flat, and in the last section of the thesis, used this property to initiate the design of a non-linear robust controller, which can *a priori* lead to better performances in case of "large motions".

#### Key Words

Narrow Tilting Vehicle, Vehicle Dynamics, Lateral Stability, Robust Control,  $H_2$  Control, Gain Scheduled Controller, Flatness Based Control